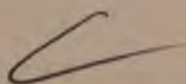



600044470P



Apolarität und Rationale Curven.

Eine systematische Voruntersuchung

zu einer

allgemeinen Theorie der linearen Räume.

Von

Dr. W. Franz Meyer,
Privatdocent an der Universität Tübingen.

Tübingen,
Verlag und Druck von Franz Fues
(L. Fr. Fues'sche Sortiments-Buchhandlung)
1883.

Dem

Begründer der Apolaritätstheorie

Theodor Reye

gewidmet.

Ein Brief als Vorwort.

Hochverehrter Herr Professor,

Gestatten Sie mir an dieser Stelle einige persönliche Bemerkungen.

Es sind bereits mehrere Jahre her, als mir Ihre bahnbrechenden Schöpfungen auf dem Gebiete der Apolaritätstheorie die erste Anregung gaben, auf diesem Wege zu einer allgemeinen projektivischen Theorie der linearen Räume vorzudringen (cf. Kap. III und pg. 203).

Allmählich erkannte ich dabei vor Allem die Nothwendigkeit, Ihre Resultate mit der binären Combinantentheorie in innigere Verknüpfung zu bringen. Nunmehr, wo ich die erste Frucht meiner diesbezüglichen Studien vorlege, hoffe ich, dass es mir gelungen sein möchte, Ihre Theorie einmal nicht unerheblich weiterzuführen, andrerseits aber auch in neuen Zusammenhang mit manchen, scheinbar abseits liegenden Gebieten zu bringen.

Ich fühle die Verpflichtung, meiner Verehrung Ihrer Leistungen in dieser Widmung öffentlich Ausdruck zu geben, wenn ich auch nicht in Abrede stellen kann und will, dass die gemeinte Theorie auch von anderer Seite her, so besonders von H. Rosanes, und in neuester Zeit von den H.H. Brill und Stephanos namhafte Förderung erfahren hat (cf. Litteraturverz.).

Desgleichen muss ich in weiterem Kreise der wichtigen Arbeiten der H.H. Sylvester, Smith, Gordan, Brill, Sturm, Em. Weyr, G. Veronese u. A. ganz besonders hier Erwähnung thun.

Was die Anordnung und Darstellung des Stoffes angeht, so muss ich in verschiedenen Punkten auf Ihre gütige Nach-

sicht rechnen. Abgerechnet z. B. stilistische Schwächen, bin ich mir namentlich bewusst, dass einzelne (mittlere) Partien von Kap. II einen breiteren Raum einnehmen, als sie ihrem, theilweise nicht neuen, Inhalte nach dürften. Es dürfte mich hier in etwas rechtfertigen, dass ich mich in den Stand setzen wollte, mich später auf diese Dinge in möglichster Kürze berufen zu dürfen.

Desgleichen sind die bei den verschiedenen Theilen des Werkes geforderten Vorkenntnisse von ungleicher Natur vgl. z. B. Kap. I mit der ersten Hälfte von Kap. II. Zum Theil möchte dies freilich in der Verschiedenartigkeit geometrischer und algebraischer Auffassung begründet sein.

Endlich ist die Trennung zwischen Bekanntem und Neuem, Fremdem und Eigenem nicht immer scharf und consequent genug beobachtet: mir schwebte hauptsächlich die Absicht vor, der Gestaltung des Ganzen ein individuell möglichst einheitliches Gepräge zu geben; ich habe in diesem Sinne sämmtliche Entwicklungen, auch wo sie sich auf geläufigere Dinge beziehen, noch einmal selbständig durchgeführt.

Im Uebrigen sei mir erlaubt zu bemerken, dass Untersuchungen, die schon von vornherein im Hinblick auf das gesteckte Ziel einen so ausgedehnten Umfang erreichen mussten, im Einzelnen manche Lücken zeigen und vielfache Berichtigung erheischen werden (cf. pg. 347). Sollte doch auch in dieser „systematischen Voruntersuchung“ keineswegs das volle Material zum künftigen Gebäude, bis in's Detail der inneren Einrichtung, beschafft sein. Dagegen, scheint mir, sind die wesentlichen Begriffe, Beweismethoden und Sätze so weit entwickelt, wie ich sie behufs der Durchführung der allgemeinsten Theorie (cf. Kap. III) zur Zeit für hinreichend halte.

Tübingen, Anfang März 1883.

W. Franz Meyer.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Capitel I.

Die rationalen Curven.

Capitel II.

Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven.

Abschnitt I.

Die Normcurven (speciell der Ebene und des Raumes).

Abschnitt II.

Die binäre biquadratische Form f und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

Abschnitt III.

Die binäre Form sechsten Grades f und die biquadratische Involution und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

Abschnitt IV.

Die biquadratische Involution auf der cubischen Raumcurve. Zweiter Theil.

Capitel III.

Verallgemeinerungen.

Apolarität

und

Rationale Curven.

Einleitung.

Das Werk, das ich hiermit dem mathematischen Publicum übergebe, zielt in letzter Linie (cf. Kap. III) auf eine durchgreifende Verwerthung der Algebra für die höhere Mannigfaltigkeitslehre. Es steht damit nur scheinbar im Widerspruche, wenn ich die geometrischen Formulirungen fast durchgängig nur als Einkleidungen rein algebraischer Wahrheiten ansehe, wie sie im Wesentlichen nur dem Zwecke einer besseren Veranschaulichung dienen. Denn betrachtet man einmal prinzipiell algebraische Ueberlegungen als die Quelle der ganzen Forschung, so muss, streng genommen, Alles, was sich ihrer Anwendung auf fremde Gebiete erschliesst, als Beiwerk erscheinen. Allerdings kann dann dieses Beiwerk, sofern man es an und für sich und unabhängig von dem Leitungswege betrachtet, einen bedeutenden und bleibenden Werth beanspruchen; späterer Forschung bleibe es überlassen, direktere Beweismittel aufzuspüren.

Wegen des Einzelnen kann ich hier auf die Einleitungen zu den einzelnen Capiteln, Abschnitten und Paragraphen verweisen: nur das erste Capitel bedarf einiger erläuternder Zusätze.

Dieses nimmt schon insofern eine Ausnahmestellung ein, als (abgesehen von seinem rein algebraischen Charakter) der Gang seiner Entwicklung keineswegs eine kanonische Stabilität beansprucht; vielmehr erkennt man leicht, wie sich darin ein mehrmals in sich zurücklaufender Process wiedergiebt, dessen einzelne Phasen mannigfach ihre Rolle vertauschen können.

So z. B kann man von der Form des Schnittpunkt-

theorems §. 3 ausgehend (die man leicht als eine nahezu a priori evidente aufstellen kann), den Grassmann'schen Satz (§. 1) ableiten.

Aehnlich kann man mit wenigen Mitteln direkt zum Beweise des wichtigen Combinantenprincips (pg. 39) gelangen, das dann die verschiedenen Formen des Schnittpunkttheorems a nuce enthält.

So ist weiter der Funktionaldeterminantensatz am Ende des Capitels als direkter Ausfluss des Grassmann'schen Satzes darstellbar etc.

Die gegebene, scheinbar etwas complicirte Gestaltung dieses Capitels ist gewählt, einmal, weil die mancherlei Hülfssätze später zur Anwendung kommen, und dann, um den innigen Zusammenhang mit verwandten Untersuchungen (namentlich der H.H. Gordan, Brill und Garbieri) zu beleuchten.

Inzwischen sind neueste Arbeiten (der H.H. Brill und Stephanos) erschienen, die sowohl das erwähnte Combinantenprinzip als verschiedene Sätze über die Involutionen vierter Ordnung enthalten. Ueber die dadurch eingetretene Verschiebung meiner Prioritätsansprüche cf. pg. 241

Im Uebrigen bitte ich den Leser, der sich vorerst mit Plan und Anlage des Werkes vertraut machen will, mit der Lektüre von Cap. II zu beginnen und erst bei Gelegenheit auf Cap. I zurückzugreifen. Das Hauptprinzip, die Räume (spec. Ebene und Raum) mit allen ihren Elementen auf die bez. „Normcurven" zu beziehen, wird ihn als sicherer Führer geleiten.

Das letzte Capitel tritt hier zwar nur als ein, wenn auch sehr beachtenswerther Anhang auf, wird jedoch in dem künftigen Werke „über die linearen Räume" (cf. pg. 348, 396) eine der wichtigsten Grundlagen bilden.

Tübingen: Anfang März 1883.

Capitel I.

Die rationalen Curven.

§. 1.

Der Grassmann'sche Fundamentalsatz über die Determinanten einer Matrix.

1. Dieser Satz befindet sich mit Beweis (was ich einer Mittheilung des Herrn Dr. Mehmke in Stuttgart verdanke) in der Grassmann'schen Ausdehnungslehre vom Jahre 1862 Nr. 112.

Er bildet weiterhin die Grundlage der Abhandlung von Clebsch „Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie" Göttinger Abhandlungen Bd. XVII (1872). Clebsch stellt den Satz von Neuem auf und beweist ihn mittelst Determinantenmultiplication, spricht aber zugleich die Vermuthung aus, dass er sich schon bei Grassmann befinden könnte [1].

Ich halte einen neuen Beweis des Satzes für nützlich, der mir ziemlich einfacher zu sein scheint.

Es genügt vollständig, die Methode des Beweises an dem einfachen Fall einer Matrix von zwei Horizontal- und fünf Vertikalreihen darzulegen. Der Bequemlichkeit wegen soll, wie bei Clebsch, die Vorstellung eines Raumes von 4 (resp. n) Dimensionen beibehalten werden, um so mehr, da sie jetzt so ziemlich allgemein üblich ist.

Durch zwei Punkte (α_i) (β_i) dieses Raumes geht eine „Gerade" (1) $\rho x_i = \alpha_i\lambda + \beta_i\mu$ $(i = 0,1,2,3,4)$.

Ein Lineargebilde

(2) $u_x \equiv u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$

ist durch vier Punkte eindeutig bestimmt: durch die Gerade (1) geht also noch eine zweifach unendliche lineare Schaar d. h. die Gerade ist auch dargestellt durch das System

(3) $\sigma\mu_i = \mu_i m + \nu_i n + \pi_i p \ (i = 0, \ldots 4)$, wo (μ_i) (ν_i) (π_i) irgend drei solcher Lineargebilde sind, deren gemeinsame Punkte eben die Punkte unserer Geraden sind. Dabei sind λ, μ resp. m, n, p homogene Parameter, ρ, σ beliebige Faktoren. Dann sind bekanntlich nach Plücker & Cayley als homogene Coordinaten der Geraden entweder die Determinanten der Matrix $(\alpha_i \ \beta_i)$ oder die der Matrix $(\mu_i \ \nu_i \ \pi_i)$ aufzufassen d. s. solche, die sich bei „Verschiebung“ der Punkte α, β auf der Geraden resp. bei „Drehung“ der Gebilde μ, ν, π um die Gerade nur je um einen gemeinsamen Faktor ändern.

Soll nun ein Punkt (α_i) in einem Lineargebilde (μ_i) liegen, so findet die Relation

$$(4) \quad \alpha_\mu \equiv \Sigma\alpha_i\mu_i = 0 \text{ statt.}$$

Da nun offenbar jeder Punkt (x_i) der Geraden in jedem ihrer Gebilde (u_i) liegt, so finden die Gleichungen statt:

(5) $\alpha_\mu = 0 \ \beta_\mu = 0 \ \alpha_\nu = 0 \ \beta_\nu = 0 \ \alpha_\pi = 0 \ \beta_\pi = 0.$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich durch resp. Multiplication mit β_0, α_0 und Subtraktion:

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_1 p_{01} + \mu_2 p_{02} + \mu_3 p_{03} + \mu_4 p_{04} = 0 \text{ und analog} \\ \nu_1 p_{01} + \nu_2 p_{02} + \nu_3 p_{03} + \nu_4 p_{04} = 0 \\ \pi_1 p_{01} + \pi_2 p_{02} + \pi_3 p_{03} + \pi_4 p_{04} = 0 \end{cases}$$

wo $p_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha_i \alpha_k \\ \beta_i \beta_k \end{vmatrix}$. Aus dem System (6) ergiebt sich wieder durch resp. Multiplication mit den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 & \pi_1 \\ \mu_2 & \nu_2 & \pi_2 \end{vmatrix} \text{ und Addition}$$

(7) $p_{03}\, q_{123} + p_{04}\, q_{124} = 0$ wo $q_{lmn} = \begin{vmatrix} \mu_l & \nu_l & \pi_l \\ \mu_m & \nu_m & \pi_m \\ \mu_n & \nu_n & \pi_n \end{vmatrix}$.

Hätten wir statt der Indices 0, 1, 2 die andern i, n, m gewählt, so hätten wir erhalten:

(8) $p_{ik}\, q_{nmk} + p_{il}\, q_{nml} = 0$ (i, k, l, m, n sind die 5 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 in irgend einer Folge).

Dies ist die gesuchte Relation. Dafür können wir auch schreiben

(8*) $\frac{p_{ik}}{p_{il}} = \frac{-q_{lmn}}{q_{kmn}} = \frac{(-1)^{i+k} q_{lmn}}{(-1)^{i+l} q_{kmn}}$

oder (9) $\rho p_{ik} = (-1)^{i+k} q_{lmn}$.

Genau in analoger Weise ergiebt sich die allgemeine Formel (10) $\rho p_{iklm\ldots} = (-1)^{i+k+l+m\ldots} q_{rstu\ldots}$.

Es gilt dabei die einfache Regel, dass die Folge der ganzen Indexreihe $0, 1, 2, \ldots d$ durch Löschen der einen Theilreihe $i, k, l, m \ldots$ in die Folge der Restreihe $r, s, t, u, \ldots$ übergeht.

Dafür kann man bekanntlich auch schreiben

(10*) $\rho p_{iklm\ldots} = q_{\rho\sigma\tau\ldots}$

wo dann $iklm \ldots \rho\sigma\tau \ldots$ eine positive Permutation der Zahlen $0, 1, \ldots d$ ist [2].

Rein algebraisch spricht sich unser Satz dann so aus:

„Die vollständigen Determinanten der Matrix

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{iq} \end{vmatrix} \quad i < q$$

sind (bis aufs Vorzeichen) proportional den vollständigen Determinanten der Matrix

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_{i+1,1} & a_{i+1,2} \dots & a_{i+1,q} \\ a_{i+1,2} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{qq} \end{vmatrix}$$

und zwar die Determinante aus der r_1^{ten} $r_2^{ten} \dots r_i^{ten}$ Vertikalen der ersten proportional der aus den Restvertikalen der zweiten gebildeten d. h.

$$(13) \quad \rho p_{r_1 r_2 \dots r_i} = q_{r_{i+1} r_{i+2} \dots r_q}$$

wo wieder $r_1\, r_2 \dots r_i\, r_{i+1} \dots r_q$ irgend eine positive Permutation der Zahlen 1, 2, . . . q darstellt, unter der Voraussetzung der Relationen:

$$(14) \quad a_{r1}\, a_{s1} + \alpha_{r2}\, a_{s2} + \dots a_{rq}\, a_{sq} = 0$$

$$\text{wo } \left.\begin{matrix} r = 1, 2, \dots i \\ s = i+1,\ i+2, \dots q \end{matrix}\right\}"$$

Für den Fall einer Matrix mit zwei resp. vier Reihen erhält man die bekannte Relation zwischen den Plücker'schen Strahlen- und Axencoordinaten einer Raumgeraden $\rho p_{ik} = q_{lm}$.

§. 2.

Die linearen Schnittpunktsgleichungen erster Ordnung für die rationalen ebenen Curven vierter Ordnung (R_4^2) (als Typus für die rationalen Curven n^{ter} Ordnung im Raum von d Dimensionen).

2. Gehen wir von der bekannten Darstellung derselben aus

$$(1) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\, \lambda^4 + a_{i1}\, \lambda^3 + a_{i2}\, \lambda^2 + a_{i3}\, \lambda + a_{i4}$$
$$(i = i, k, l = 1, 2, 3)$$

so liegen vier Punkte derselben $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4$ auf einer Geraden

$$(2) \quad u_x = u_i\, x_i + u_k\, x_k + u_l\, x_l = 0$$

wenn die λ die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(3) \quad u_\varphi = u_i \varphi_i + u_k\, \varphi_k + u_l\, \varphi_l = \lambda^4\, (u_i\, a_{i0} + u_k\, a_{k0} + u_l\, a_{l0})$$

$$+ \lambda^{3} (u_i a_{i1} + u_k a_{k1} + u_l a_{l1}) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (u_i a_{i4} + u_k a_{k4} + u_l a_{l4}) = 0$$

Demnach sind die elementarsymmetrischen Funktionen der λ lineare ganze Funktionen der u; die Elimination der letzteren ergiebt die gesuchten Relationen.

Wir setzen der Homogeneität wegen

$$(4)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{s_1}{s_0} \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \ldots = \frac{s_2}{s_0}$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \ldots = \frac{s_3}{s_0} \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \frac{s_4}{s_0}$$

und verstehen unter τ einen beliebigen Faktor; dann ergiebt sich aus den Gleichungen

$$(5)\ (-1)^{i}\ \tau s_r = u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr}$$

die Nothwendigkeit des Verschwindens aller vollständigen Determinanten der Matrix:

$$(6) \quad \left|\begin{matrix} s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} \\ -s_1 & a_{i1} & a_{k1} & a_{l1} \\ s_2 & a_{i2} & a_{k2} & a_{l2} \\ -s_3 & a_{i3} & a_{k3} & a_{l3} \\ s_4 & a_{i4} & a_{k4} & a_{l4} \end{matrix}\right|$$

---

3. Definitionen.

Wir werden weiterhin die s_i (i von 0 bis 4, allg. bis n) schlechtweg die (homogenen) symmetrischen Funktionen der 4 (allg. n) Grössen (Parameter, Argumente, Werthe, Punkte) λ nennen. Sind mehrere Reihen derselben vorhanden, so seien sie mit s_i, S_i, σ_i, τ_i, t_i, etc. bezeichnet.

Umgekehrt seien der Kürze wegen unter „die s_i, S_i etc.“ solche symmetrischen Funktionen von Grössen λ, μ etc. verstanden.

Die vollständigen Determinanten einer Matrix nennen wir ihre „Kerne“. Das Verschwinden eines Kernes involvire dann eine „Kerngleichung“.

Verschwinden alle Kerne einer Matrix, so sagen wir, „die Matrix verschwindet“.

Die in (6) erhaltenen Gleichungen nennen wir die linearen Schnittpunktsgleichungen (oder die ersten Grades) der R_4^2, weil sie in den s_i linear sind; und zugleich erster Ordnung, weil sie aussagen, wann vier Punkte der Curve auf einem ebenen Punktgebilde erster Ordnung (d. h. einer Geraden $u_x = 0$) liegen.

Daraus erhellt die Bedeutung der Schnittpunktsgleichungen g^{ten} Grades m^{ter} Ordnung für irgend eine rationale Curve n^{ter} Ordnung im Raum von d Dimensionen (eine R_n^d):

$$(7)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\,\lambda^n + a_{i1}\,\lambda^{n-1} + \ldots a_{in}$$
$$(i = 0, 1, \ldots d)$$

von selbst.

Auch alle Umformungen der Schnittpunktsgleichungen (wenn nur Grad und Ordnung erhalten bleiben) sollen unter jener Bezeichnung miteinbegriffen sein.

4. Das Ableitungsverfahren für die Gleichungen (6) ist unmittelbar in gleicher Weise auf die R_n^d (7) anwendbar. Ihre linearen Schnittpunktsgleichungen erster Ordnung sind gegeben durch die „verschwindende“ Matrix:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} & s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} & a_{m0} & \ldots \\ - & s_1 & a_{i1} & {}_{k1} & a_{l1} & a_{m1} & \ldots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^n & s_n & a_{in} & a_{kn} & a_{ln} & a_{mn} & \ldots \end{vmatrix}$$

wo $i, k, l, m, \ldots$ die Zahlen $0, 1, 2, \ldots d$ sind.

Wo es im Weiteren nicht ausdrücklich anders betont

wird, nennen wir dieses einfachste System von Schnittpunktsgleichungen der R_n^d „ihr Schnittpunkttheorem".

§. 3.

Umformung des Schnittpunkttheorems der R_4^2.

5. Das System der Kerngleichungen (§. 2 (6)) ist bekanntlich zwei Gleichungen aequivalent [3]. (Geometrisch heisst das, dass eine Gerade durch zwei Punkte (der Curve) bestimmt ist.) Solche zwei Gleichungen kann man im Allgemeinen aus den fünf Kerngleichungen beliebig auswählen; eine wird etwa sein

$$(1)\quad A_4 \equiv \begin{vmatrix} s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} \\ -s_1 & a_{i1} & a_{k1} & a_{l1} \\ s_2 & a_{i2} & a_{k2} & a_{l2} \\ -s_3 & a_{i3} & a_{k3} & a_{l3} \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir eine dreireihige Determinante, wie

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} \\ a_{i1} & a_{k1} & a_{l1} \\ a_{i2} & a_{k2} & a_{l2} \end{vmatrix}$$ mit d_{012} (so dass $d_{012} = -d_{102}$ etc. ist)

so stellt sich A_4 in der Form dar:

$$(3)\ A_4 \equiv s_0\, d_{123} + s_1\, d_{023} + s_2\, d_{013} + s_3\, d_{012} = 0.$$

Analoge Form haben die andern vier Gleichungen: in $A_i = 0$ kommt s_i nicht vor und der Faktor von s_r ist $d_{r_1 r_2 r_3}$, wo $r_1 r_2 r_3$ die natürliche Reihenfolge der drei Zahlen ist, die aus 0, 1, 2, 3, 4, nach Streichen von i, r restiren.

Nach dem Grassmann'schen Satze (§. 1) sind die Kerne d_{ikl} der Matrix

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l0} & a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \end{vmatrix}$$

proportional $(-1)^{m+n}\Delta_{mn}$, wo Δ_{mn} der jedesmal entsprechende Kern der Matrix

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \text{ ist, d. h. } \Delta_{mn} = \begin{vmatrix} \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_m & \beta_n \end{vmatrix}$$

[und zwar folgen sowohl in d_{ikl} als in Δ_{mn} die Indices in natürlicher Reihe] unter den Bedingungen

$$(6)\quad \begin{cases} A_i \equiv \alpha_0\, a_{i0} + \alpha_1\, a_{i1} + \ldots \alpha_4\, a_{i4} = 0, \\ B_i \equiv \beta_0\, a_{i0} + \beta_1\, a_{i1} + \ldots \beta_4\, a_{i4} = 0, \end{cases} \text{ analog}$$

$$\left.\begin{matrix} A_k = 0 & A_l = 0 \\ B_k = 0 & B_l = 0 \end{matrix}\right\}$$

Dadurch geht z. B. A_4 über in

$$(7)\ A_4 \equiv s_0\,\Delta_{40} - s_1\,\Delta_{41} + s_2\,\Delta_{42} - s_3\,\Delta_{43} + s_4\,\Delta_{44} = 0$$

(wo $\Delta_{44} = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$) und A_i in

$$(8)\ A_i \equiv \sum_0^4 r\, (-1)^r\, s_r\,\Delta_{ir} = 0.$$

Diese Form stellt sich wieder dar als die lineare Combination

$$(9)\quad A_i \equiv \alpha_s\,\beta_i - \beta_s\,\alpha_i = 0$$

der beiden Formen

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha_s \equiv \alpha_0 s_0 - \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 - \alpha_3 s_3 + \alpha_4 s_4 = 0 \\ \beta_s \equiv \beta_0 s_0 - \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 - \beta_3 s_3 + \beta_4 s_4 = 0. \end{cases}$$

Daher sind die fünf Kerngleichungen auch den zwei Gleichungen

$$\alpha_s = 0 \qquad \beta_s = 0$$

aequivalent. Das Resultat ist also folgendes:

„Das Schnittpunkttheorem der R_4^2

$$(11)\ \rho x_i = a_{i0}\,\lambda^4 + a_{i1}\,\lambda^3 + \ldots + a_{i4}$$

ist symmetrisch dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$(12)\ \alpha_s \equiv \Sigma\alpha_i\, s_i\, (-1)^i = 0 \quad \beta_s \equiv \Sigma\beta_i\, s_i\, (-1)^i = 0$$

wo die $(\alpha\beta)_{ik}$ bestimmt sind durch die 6 Gleichungen:

$$(13)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} = 0 \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir} = 0$$
$$(i = i, k, l = 1, 2, 3)$$

Die Interpretation im Raume von 4 Dimensionen möge, als hier unwesentlich, unterdrückt werden. Das Gleiche gilt von folgender Nummer.

6. Combinirt man in gleicher Weise das Schnittpunkttheorem der R_n^d (§ 2 (8)) mit dem allgemeinen Grassmann'schen Satze (§ 1 (11—14)), so erhält man als Resultat:

„Das Schnittpunkttheorem der R_n^d

$$(14)\quad \rho x_i = a_{i0}\, \lambda^n + a_{i1}\, \lambda^{n-1} + \dots a_{in} = \varphi_i(\lambda)$$
$$(i = 0, 1, \dots d)$$

ist symmetrisch dargestellt durch die „$n-d$" Gleichungen

$$(15)\ A_{ks} \equiv \Sigma_0^n{}_i\ \alpha_{ki}\, s_i\, (-1)^i = 0$$
$$(k = 1, 2, \dots (n-d))$$

wo

$$(16)\ \Sigma_r\, \alpha_{1r}\, a_{ir} = 0 \quad \Sigma_r\, \alpha_{2r}\, a_{ir} = 0 \dots \quad \Sigma_r\, \alpha_{(n-d),r}\, a_{ir} = 0$$
$$(i = 0, 1, \dots d)$$

(wodurch die Determinanten der α_{kr} bestimmt sind)."

§. 4.

Reciprocität zwischen den $\varphi_i(\lambda)$ und A_{ks}.

7. Aus der Symmetrie der in den α und a bilinearen Gleichungen (16) (§ 3) (geometrisch aus der Dualität der entsprechenden Lineargebilde höherer Räume) folgt sofort die Umkehrung des letzten Satzes in folgender Weise. Es liefert diese einen Fundamentalsatz der rationalen Curven.

Satz. „Stellt das Gleichungssystem

$$(1)\ A_{ks} \equiv \Sigma_0^n{}_i\ \alpha_{ki}\, s_i\, (-1)^i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots (n-d)$$

das Schnittpunkttheorem der R_n^d

$$(2)\ \rho x_i = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \dots a_{in} \quad (i = 0, \dots d)$$

dar; so stellt umgekehrt das Gleichungssystem

$$(3)\ A_{is} \equiv \sum_0^n k\, a_{ik}\, s_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots d)$$

das Schnittpunkttheorem der R_n^{n-d-1}

$$(4)\ \rho x_k \equiv \alpha_{k0}\lambda^n - \alpha_{k1}\lambda^{n-1} + \dots\dots + (-1)^n \alpha_{kn}$$
$$(k = 0, \dots\dots (n-d-2)) \qquad \text{dar.“}$$

§. 5.

Die Apolarität des Schnittpunkttheorems.

8. Bekanntlich entsteht eine lineare, ganze Funktion der (aus n Grössen $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$ gebildeten) s_i

$$(1)\ a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + \dots a_n s_n$$

(abgesehen von einem Zahlenfaktor) durch successive Polarisation nach λ_1, $\lambda_2, \dots \lambda_n$ aus der binären Form

$$(2)\ a_\lambda^n \equiv a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n$$

die aus a_s durch Gleichsetzen aller λ fliesst.

(Man nennt, wenn eine binäre Form $\varphi(\lambda)$, oder homogen geschrieben $\varphi(\lambda,\mu)$, gegeben ist, den Ausdruck

$$(3)\ \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\lambda_1 + \frac{\delta\varphi}{\delta\mu} \text{ (wo man wieder } \mu = 1 \text{ setzen kann)}$$

die Polare von φ, genommen nach λ_1 oder auch: die Form (3) entsteht aus φ durch Polarisation nach λ_1.)

Nach der Gordan'schen Bezeichnungsweise (Zur Theorie der binären Formen, Programm, 1875) wird durch Polarisation einer Form a_λ^n nach λ_1 „$a_\lambda^{n-1}{}_{\lambda_1}$“: durch Polarisation nach λ_1, λ_2 „$a_\lambda^{n-2}\lambda_1\lambda_2$“ mithin

$$(4)\ a_s \equiv a_{\lambda_1\lambda_2} \dots \lambda_n$$

(Die Richtigkeit dieser Formel ersieht man übrigens unmittelbar daraus, dass die rechte Seite $a_{\lambda_1 \lambda_2} \dots {}_{\lambda_n}$ linear und symmetrisch in den λ sein muss und durch Gleichsetzen aller λ nach dem Euler'schen Satze über homogene Funktionen in a_λ übergeht.)

9. Nun war, um zunächst wieder an unsern Typus, die R_4^3 (§ 3) anzuknüpfen, das zu

$$(5)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0} \lambda^4 + a_{i1} \lambda^3 + \dots a_{i4} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gehörige Schnittpunkttheorem gegeben durch

$$(6)\ \alpha_s \equiv \Sigma\, \alpha_i\, s_i\, (-1)^i = 0 \qquad \beta_s \equiv \Sigma \beta_i\, s_i\, (-1)^i = 0$$

$$\text{wo } (7)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} = 0 \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Aus α_s entsteht nach Gleichsetzung aller λ

$$(8)\ \alpha_\lambda^4 \equiv \alpha_0 - 4\, \alpha_1\, \lambda + 6\, \alpha_2\, \lambda^2 - 4\, \alpha_3\, \lambda^3 + \alpha_4\, \lambda^4.$$

Die bilineare Invariante der Formen α_λ^4 resp. β_λ^4 und $\varphi_i(\lambda)$ hat den Werth

$$(9)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} \qquad \text{resp.} \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir}.$$

Diese verschwinden also gemäss (7) sämmtlich.

In diesem Falle heissen bekanntlich α_λ^4 resp. β_λ^4 und $\varphi_i(\lambda)$ apolar zu einander (nach Reye) oder conjugirt (nach Rosanes)[4].

Das vollkommen analoge Resultat ergiebt sich für das Schnittpunkttheorem der R_n^d (§ 3).

Demnach hat man den wichtigen Satz:

„Setzt man im Schnittpunkttheorem einer R_n^d

$$(10)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\, \lambda^n + \dots a_{in} \qquad (i = 0, 1 \dots d)$$

$$(11)\ a_{1,s} = 0 \qquad a_{2,s} = 0 \dots \qquad a_{n-d,s} = 0$$

alle Argumente $\lambda_1 \dots \lambda_n$ gleich λ, so sind die entsprechenden Formen

$$(12)\ a^n_{1,\lambda},\qquad a^n_{2,\lambda},\dots\qquad a^n_{n-d,\lambda}$$

apolar zu den Formen $\varphi_i(\lambda)$."

Dann ist aber bekanntlich auch jede lineare Combination der Formen (12) apolar zu jeder linearen Combination der $\varphi_i(\lambda)$, oder (mit Rosanes):

„Die „$(n-d)$ gliedrige Gruppe" der $a^n_{k,\lambda}$ $(k=1\dots(n-d)$ ist apolar zur $(d+1)$ gliedrigen Gruppe der $\varphi_i(\lambda)$ $(i=0,1,\dots d)$."

Wir nennen die Formen (12) (aus denen also nach Nr. 8 mittelst successiver Polarisation nach $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die linken Seiten des Schnittpunkttheorems entstehen) die „Schnittpunktformen" der R^d_n.

Da nun alle zu $(d+1)$ binären Formen n^{ten} Grades apolaren Formen eine $(n-d)$ gliedrige Gruppe bilden (und umgekehrt), so können wir sagen:

Satz. „Die Schnittpunktformen einer R^d_n

$$(10)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + \dots a_{in} \quad (i=0,1,\dots d)$$

bilden die zu den $\varphi_i(\lambda)$ apolare Gruppe

$$(13)\ \psi_k(\lambda). \qquad (k=1,\dots(n-d).)"$$

Diese Fassung des Fundamentalsatzes der rationalen Curven lässt sofort die Evidenz des §. 4 bewiesenen Reciprocitätssatzes hervortreten. Denn aus der Reciprocität der Apolarität der φ_i und ψ_k folgt sofort, dass die φ_i die Schnittpunktformen der R^{n-d-1}_n

$$(14)\ \sigma x_k = \psi_k \text{ sind.}$$

Fassen wir Alles zusammen, so gewinnt endlich unser Fundamentalsatz die Gestalt:

Satz. „Hat man zwei binäre Formengruppen n^{ten} Grades

$$\varphi_i(\lambda)\ (i=0,1,\dots d) \qquad \psi_k(\lambda)\ (k=0,1\dots n-d-1)$$

von der Art, dass jede die *vollständige* zur andern apolare Gruppe ist, so entsteht durch Polarisation der einen Gruppe nach n Werthen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und Nullsetzen das Schnittpunkttheorem der andern Gruppe (d. h. der Curve $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ resp. $\rho x_k = \psi_k(\lambda)$)."

§. 6.

Das lineare Schnittpunkttheorem höherer Ordnung.

10. Dieses leitet sich, wie das der ersten Ordnung, mit Zugrundelegung des Hülfssatzes ab:

„Wenn unter den Werthsystemen der s_i, welche der Bedingung

$$a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots a_n s_n = 0$$

genügen, sich das Wurzelsystem einer binären Form

$$b_\lambda \equiv b_0 \lambda^n - b_1 \lambda^{n-1} + \ldots . (-1)^n b_n$$

befinden soll, so müssen die beiden Formen

$$b_\lambda, \text{ und } a_\lambda \equiv a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n$$

apolar sein und umgekehrt."

Wir wenden diesen Satz zunächst wieder auf unser Beispiel, die R_4^2 an. Ein Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ ist durch fünf Punkte bestimmt und schneidet die R_4^2 in acht Punkten, so dass zwischen den diesen entsprechenden Werthen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8$ drei Relationen bestehen, die linear in den s_i $(i = 0, 1, \ldots 8)$ sind.

Wollten wir direkt verfahren wie in No. 1, so würden wir die Gleichung achten Grades, deren Wurzeln $\lambda_1 \ldots \lambda_8$ sind, aufstellen. Ihre Coefficienten, homogene lineare Funktionen der sechs Coefficienten von a_x^2, sind den s_i proportional. Die Elimination der ersteren liefert eine verschwindende Matrix von 9 bez. 7 Reihen, die drei Gleichungen

$$\alpha_s = 0 \qquad \beta_s = 0 \qquad \gamma_s = 0$$

aequivalent ist.' Aber in welchem engeren Zusammenhang stehen die drei Formen „α_λ, β_λ, γ_λ" zu den drei Formen $\varphi_i(\lambda)$?

Diesen finden wir nun einfach so.

Unter den Kegelschnitten $a_x^2 = 0$ (mit variablen Coefficienten) befinden sich unendlich viele Geradenpaare und doppelt zählende Gerade, deren Schnitte mit der R_4^2 durch Gleichungen von der Form „$u_\varphi\, v_\varphi = 0$, $u_\varphi^2 = 0$" dargestellt werden. Speciell, den Seiten des Coordinatendreiecks entsprechend, sind unter ihnen die Gleichungen $\varphi_i\, \varphi_k = 0$, $\varphi_i^2 = 0$ enthalten. Aus ihren linken Seiten setzt sich die gesuchte, allgemeinste Gleichung achten Grades linear zusammen.

„Demnach stellt die zu jenen sechs Gleichungen, d. h. zur Gruppe a_φ^2 conjugirte Gruppe die gesuchten drei Gleichungen $\alpha_\lambda = 0$ $\beta_\lambda = 0$ $\gamma_\lambda = 0$ oder, was dasselbe ist, die Gruppe „$\varkappa\alpha_\lambda + \lambda\beta_\lambda + \mu\gamma_\lambda$" dar (wo $\varkappa$, λ, μ variabel sind)".

So gilt allgemein der Satz:

„Das lineare Schnittpunkttheorem p^{ter} Ordnung einer R_n^d (welches dem Schnittpunktsystem der R_n^d und eines $(n-1)$fach ausgedehnten Gebildes p^{ter} Ordnung $a_x^p = 0$ entspricht) besteht aus der Gleichungsgruppe

$$a_s = 0 \qquad b_s = 0 \ldots .$$

deren zugehörige Formengruppe

$$a_\lambda, b_\lambda \ldots .$$

conjugirt ist zur Gruppe der $p$fachen Potenzen und Produkte der $\varphi_i(\lambda)$."

§. 7.

Einfluss von Identitäten zwischen den Potenzen und Produkten der $\varphi_i(\lambda)$ und deren Aufstellung.

11. Wie man weiss, erhöht sich die Gliederzahl der zu einer Anzahl von binären Formen gleicher Ordnung conjugirten Gruppe, wenn zwischen den ersteren eine oder mehrere Identitäten stattfinden.

Findet nun zwischen den *p*fachen Potenzen und Producten der $\varphi_i(\lambda)$ eine Identität statt, so heisst dies, geometrisch gesprochen, es existirt ein gewisses Gebilde $a_x^p = 0$, das die vorgelegte R_n^d ganz enthält und umgekehrt. So giebt es bekanntlich eine und nur eine Fläche zweiter Ordnung, die irgend eine gegebene R_4^3 enthält.

Jene sei $a_x^2 = 0$, diese $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Setzt man die $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ in a_x^2 ein, so muss der entstehende Ausdruck achten Grades in λ identisch verschwinden, d. h. zwischen den zehn binären Formen $\varphi_i\varphi_k, \ldots \varphi_i^2 \ldots$ herrscht eine Identität. Wie findet man diese in ihrer einfachsten Form? d. h. wie bestimmt man die Coefficienten in a_x^2? In diesem Falle erhielte man unmittelbar neun lineare Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Coefficienten.

Es soll aber ein Verfahren angegeben werden, das in der That bei Weitem einfacher zum Ziele führt, nicht nur in diesem, sondern allen ähnlichen Fällen, in denen man meistens nicht so unmittelbar, wie eben, zur Lösung gelangen möchte. Die Kraft dieses Verfahrens erstreckt sich überhaupt tief in die Theorie der rationalen Gebilde [5].

Betrachten wir zuvor noch den nächst einfacheren Fall ebener rationaler Curven. Bei ihnen tritt der Typus des angekündigten Verfahrens am deutlichsten hervor.

Die Identität niederster Ordnung, die hier auftreten kann, ist die *eine* zwischen den *n*fachen Produkten und Potenzen der $\varphi_i(\lambda)$, die bei Ersetzung der $\varphi_i(\lambda)$ durch die x_i in die Gleichung der Curve in den Coordinaten x_i übergeht.

So erhält man beispielsweise für die R_3^2 zehn binäre Formen neunter Ordnung und zwischen ihnen eine Identität. Dann giebt es aber eine eilfte zu allen jenen conjugirte Form gleicher Ordnung. Sei diese A_λ, so stellt dann $A_s = 0$ das Schnittpunkt theorem dritter Ordnung dar.

Zwischen den vierfachen Produkten und Potenzen der $\varphi_i(\lambda)$ finden dann drei (und somit ∞^2) Identitäten statt, die aus der obigen durch Multiplication mit u_φ (mit willkürlichen u_i) hervorgehen. Daher giebt es zu jenen fünfzehn Formen zwölfter Ordnung wieder eine conjugirte etc. wie oben; etc. für eine R_n^2.

Somit ist die Frage nach den im Falle der (allgemeinen) R_n^2 überhaupt auftretenden Identitäten zurückgeführt auf Herstellung ihrer Gleichung in den Coordinaten x_i d. h. auf Elimination von ρ und λ aus dem gegebenen System

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, 2).$$

Diese Aufgabe als solche ist schon mehrfach [6] (so namentlich von Herrn Brill) behandelt worden: hier kommt es darauf an, unser allgemeines Verfahren an einem Beispiel zu verdeutlichen.

12. Zu dem Zwecke genügt wieder das alte Beispiel der R_4^2

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4}.$$

Combinirt man dies System mit dem andern zweier Geraden

$$u_x = 0 \qquad v_x = 0$$

so haben die beiden Gleichungen

$$u_\varphi = 0 \qquad v_\varphi = 0$$

dann und nur dann eine Wurzel gemein, wenn der Punkt (uv) auf der R_4^2 liegt.

Nun ist nach Bézout [7] die Resultante zweier binärer Formen vierter (n^{ter}) Ordnung

$$(1)\quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \ldots + a_4 \\ b_\lambda \equiv b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + \ldots + b_4 \end{cases}$$

in der Form (aus der ihre Combinanteneigenschaft unmittelbar erhellt) darstellbar:

$$(2)\, R \equiv \begin{vmatrix} p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{02} & p_{03}+p_{12} & p_{04}+p_{13} & p_{14} \\ p_{03} & p_{04}+p_{13} & p_{14}+p_{23} & p_{24} \\ p_{04} & p_{14} & p_{24} & p_{34} \end{vmatrix} \quad \text{wo } p_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix}.$$

In unserm Fall ist

$$(3)\quad a_\lambda \equiv u_\varphi \qquad b_\lambda \equiv v_\varphi$$

$$\text{also } (4) \begin{cases} a_r \equiv u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \\ b_r \equiv v_i\, a_{ir} + v_k\, a_{kr} + v_l\, a_{lr} \end{cases} \quad (i, k, l = 0, 1, 2)$$

mithin nach bekannter Umformung $((uv)_i = u_k\, v_l - u_l\, v_k)$

$$(5)\, p_{rs} \equiv \begin{vmatrix} (uv)_i & (uv)_k & (uv)_l \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} \end{vmatrix} \equiv \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} \end{vmatrix} \equiv \sigma\, D_{rs} \equiv \sigma\, |xA_rA_s|$$

da die $(uv)_i$ den Coordinaten x_i des Schnittpunkts (uv) proportional sind. Durch Einsetzen dieser Werthe der p_{rs} in

$$R = 0$$

gelangt man nach Abscheidung des Faktors σ^4 zu der gewünschten Gleichung (resp. Identität), die aussagt, wann ein Punkt (x) auf der R_4^2 liegt d. h. zur Gleichung der Curve in Punktcoordinaten.

Sehen wir weiter zu, wie sich der Ausdruck R, resp. die Gleichung $R = 0$ für die Curven höherer Räume modificirt.

Es wird genügen, beim nächst höheren Fall, dem Beispiel der R_4^3, stehen zu bleiben.

Die p_{rs} werden jetzt zu:

$$(6)\ \begin{vmatrix} u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr} + u_m a_{mr}, & u_i a_{is} + u_k a_{ks} + u_l a_{ls} + u_m a_{ms} \\ v_i a_{ir} + v_k a_{kr} + v_l a_{lr} + v_m a_{mr}, & v_i a_{is} + v_k a_{ks} + v_l a_{ls} + v_m a_{ms} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_m & u_l & u_k & u_i \\ v_m & v_l & v_k & v_i \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l & x_m \\ y_i & y_k & y_l & y_m \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \end{vmatrix} = \sigma\, |x y A_r A_s| = \sigma D_{rs}$$

wenn man die Axencoordinaten $(uv)_{ik}$ durch die ihnen proportionalen Strahlencoordinaten $(xy)_{lm}$ ersetzt; $p_{rs} = 0$ würde die Gleichung der Geraden darstellen, die die beiden Punkte A_r, A_s verbindet.

$R = 0$ repräsentirt dann den Complex der Geraden, die die R_4^3 treffen.

Mit Benützung der obigen, leicht zu erweiternden, Bezeichnung spricht sich dann für den Fall einer Form R das allgemeine Resultat so aus:

Satz. „Lässt man in der Bézout'schen Resultantendeterminante zweier binärer Formen n^{ter} Ordnung die p_{rs} übergehen in die ihnen proportionalen

$$(7)\ D_{rs} = |x\, y\, z \ldots A_r\, A_s|$$

(wo $D_{rs} = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte A_r, A_s darstellen würde),

so repräsentirt nunmehr

$$(8)\ R = 0$$

alle Lineargebilde $(d-2)^{ter}$ Dimension, die die Curve R_n^d:

(9) $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots . a_{in} \quad (i = 0, 1, \ldots d)$ treffen, oder wenn man will: $R = 0$ ersetzt das System der Gleichungen $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ durch eine einzige."

13. In entsprechender Weise verfährt man, wenn man es nicht bloss mit einer Resultante R, sondern mit einem ganzen System solcher zu thun hat. Als Beispiel wählen wir hier die Ableitung einer der oben besprochenen Identitäten, und zwar für den schon hervorgehobenen Fall einer R_4^3.

Wir suchen also, geometrisch zu reden, die eine, durch eine solche Curve gehende Fläche zweiter Ordnung.

Soll der Schnittpunkt dreier Ebenen

$$(10) \quad u_x = 0 \quad v_x = 0 \quad w_x = 0$$

auf der R_4^3: (11) $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$

liegen, so müssen die drei biquadratischen Gleichungen

$$(12) \quad u_\varphi = 0 \quad v_\varphi = 0 \quad w_\varphi = 0$$

eine Wurzel gemein haben. Man hat demnach, wenn drei biquadratische Gleichungen gegeben sind

$$(13) \quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \ldots a_4 = 0 \\ b_\lambda \equiv b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + \ldots b_4 = 0 \\ c_\lambda \equiv c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + \ldots c_4 = 0 \end{cases}$$

diejenige Bedingung zweiten Grades in den (abc) zu suchen, die jedenfalls erfüllt sein muss, wenn eine gemeinsame Wurzel vorhanden sein soll. Hier ergiebt sich diese Bedingung sofort durch Multiplication der drei Gleichungen

$$a_\lambda = 0 \quad b_\lambda = 0 \quad c_\lambda = 0$$

mit λ und Elimination der Potenzen von λ aus den so gewonnenen sechs Gleichungen:

$$(14)\ 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \text{ oder entwickelt:}$$

$$(15)\ 0 = \Delta_{012}\Delta_{234} - \Delta_{013}\Delta_{134} + \Delta_{014}\Delta_{124} + \Delta_{023}\Delta_{034} - \Delta_{024}^2 + \Delta_{034}\Delta_{014} \equiv \Delta.$$

Da in unserm Falle der R_4^3 die a_λ, b_λ, c_λ zu ersetzen sind durch die resp. u_φ, v_φ, w_φ, so ist

$$(16)\ \Delta_{rst} = \begin{vmatrix} u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr} + u_m a_{mr}, & v_i a_{ir} + \ldots, & w_i a_{ir} + \ldots, \\ u_i a_{is} + u_k a_{ks} + u_l a_{ls} + u_m a_{ms}, & v_i a_{is} + \ldots, & w_i a_{is} + \ldots, \\ u_i a_{it} + u_k a_{kt} + u_l a_{lt} + u_m a_{mt}, & v_i a_{it} + \ldots, & w_i a_{it} + \ldots, \end{vmatrix}$$

$$= \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l & x_m \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \\ a_{it} & a_{kt} & a_{lt} & a_{mt} \end{vmatrix} = \sigma \left| x A_r A_s A_t \right| = \sigma D_{rst}$$

wo wieder die $(uvw)_{lmn}$ durch die proportionalen x_i ersetzt sind. $D_{rst} = 0$ würde die Ebene der drei Punkte A_r, A_s, A_t darstellen.

Die so umgeformte Gleichung $\Delta = 0$ ist dann in der That die Gleichung der gesuchten Fläche zweiten Grades resp. wenn man für die x_i wieder die proportionalen $\varphi_i(\lambda)$ substituirt, die gewünschte Identität zwischen den zweiten Potenzen und Produkten von vier binären Formen vierten Grades *).

14. Als ein weiteres Beispiel diene noch das bekannte

*) Genau in derselben Weise bildet man die Gleichung der einen Fläche dritter Ordnung, die durch eine allgemeine rationale Raumcurve sechster Ordnung geht [8].

Flächennetz zweiter Ordnung, dessen Individuen sämmtlich durch eine gegebene Raumcurve dritter Ordnung gehen. Sei diese

$$(17)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}$$

so haben wir zunächst alle Combinanten, zweiten Grades in den Coefficienten, von drei binären Formen dritten Grades

$$a_\lambda^3,\ b_\lambda^3,\ c_\lambda^3$$

aufzustellen, die verschwinden, wenn die drei Formen einen gemeinsamen Faktor besitzen. Sei dieser α und die dreireihigen Determinanten (abc) mit $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ bezeichnet, so ergiebt die Auflösung der drei Gleichungen

$$(18)\ a_\alpha^3 = 0 \quad b_\alpha^3 = 0 \quad c_\alpha^3 = 0:$$

$$(19)\ \alpha^3 : \alpha^2 : \alpha : 1 = \Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$$

d. h. es verschwinden alle Kerne der Matrix

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}$$

daher lautet die Gleichung des Flächennetzes, wenn v_1, v_2, v_3 drei homogene Parameter bedeuten, und die Δ_i wie im vorigen Beispiele in die $|x\ A_k\ A_l\ A_m|$ übergeführt sind:

$$(20)\ (\Delta_0\Delta_2 - \Delta_1^2)v_1 + (\Delta_0\Delta_3 - \Delta_1\Delta_2)v_2 + (\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2)v_3 = 0.$$

Anm. Nach Gordan [9]) sind alle Combinanten eines Systems von n binären Formen n^{ten} Grades

$$a_x^n,\ b_x^n,\ c_x^n,\ \ldots\ n_x^n$$

Invarianten der einen Form n^{ten} Grades, ihrer „Fundamentalcombinante"
$Q = (ab)(ac)(ad)\ldots(an)(bc)(bd)\ldots(bn)\ldots\ldots(mn)\,a_x\,b_x\ldots n_x$
Man erkennt aus obigem Beispiel, das unmittelbar verallgemeinert werden kann, sofort den bekannten Satz:

„Die Bedingungen dafür, dass n binäre Formen n^{ten} Grades einen Faktor gemein haben, sind aequivalent den anderen, dass ihre Fundamentalcombinante Q n gleiche Wurzeln besitzt."

Eine weittragende Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, dass von n binären Formen m^{ten} Grades p Formen r gemeinsame Faktoren haben, findet sich in einem späteren Abschnitt des Werkes.

15. Aus diesen Beispielen erhellt der allgemeine Satz, dessen Ausspruch für rationale Raumcurven (R_n^3) genügen wird:

Satz. „Unter all den Bedingungsgleichungen, die stattfinden, wenn drei binäre Formen n^{ten} Grades

$$(21) \quad a_\lambda^n \; b_\lambda^n \; c_\lambda^n$$

einen gemeinsamen linearen Faktor besitzen, wähle man die aus, die nur von den dreireihigen Determinanten $(abc)_{rst} = \Delta_{rst}$ abhängen: ist eine derselben

$$(22) \quad R(\Delta) = 0$$

und führt man die Δ_{rst} über in die proportionalen

$$(23) \quad D_{rst} = |x \, A_r \, A_s \, A_t|$$

so stellt dann die Gleichung

$$(24) \quad R\,(D) = 0$$

immer eine Fläche dar, die die R_n^3

$$(25) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots a_{in}$$

ganz enthält, resp. die Gleichung

$$(26) \quad R\,(D_\varphi) \equiv R\,(|\varphi \, A_r \, A_s \, A_t|) = 0$$

eine Identität bestimmten Grades zwischen den φ_i. Das ganze System $R\,(D) = 0$ repräsentirt somit ein ganzes System von Flächen, deren gemeinsamer Schnitt die gegebene Curve ist.“

16. Es ist ersichtlich, wie sich der Satz nach drei Richtungen erweitert; einmal, wenn an Stelle der Δ_{rst} der Reihe nach $|x, y, A_r \, A_s \, A_t|$; $|x, y, z, A_r \, A_s \, A_t|$ etc. treten: andrerseits, wenn sich die Zahl der binären Formen gleichen Grades, die einen gemeinsamen Faktor haben, vergrössert, und endlich, wenn dieser Faktor nicht nur ein linearer, sondern von höherer Ordnung ist.

Wir kommen später von anderer Seite darauf zurück: hier möge dagegen hervorgehoben werden, in welcher Be-

ziehung die explicirte Umformung der Determinanten (ab), (abc) etc. zu dem bekannten Hesse-Clebsch'schen Uebertragungsprincipe steht. Dieses lautet in seiner einfachsten Form (vgl. z. B. die Darstellung in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann)[10], wenn wir zum bequemeren Anschluss an das Obige die zur gewöhnlichen dualistische Formulirung wählen:

„Soll in einer Ebene von einem Punkte an eine Curve n^{ter} Classe eine Tangentengruppe mit einer besondern projektivischen Eigenschaft gehen, so erhält man die Gleichung für den Ort dieses Punktes auf die Weise: Man stelle die Invariante der binären Form n^{ter} Ordnung, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussagt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende Determinante (ab) durch eine dreigliedrige (abx), wo die x die Coordinaten des Punktes und die $a, b, \ldots$ Symbole der gegebenen ternären Form oder wie man auch sagen kann, die Coordinaten eines Punktes bedeuten, der $n$fach gezählt, die gegebene Classencurve symbolisch repräsentirt."

Die Erweiterung dieses Prinzipes besteht dann einmal darin, dass man die Determinanten (ab) der Reihe nach überführt in (abx) $(abxy)$ $(abxyz)$ etc.; andrerseits von den Invarianten ternärer, quaternärer etc. Formen ausgeht, die als symbolische Aggregate von Determinanten (abc) $(abcd)$ etc. auftreten.

Nun ist offenbar die angegebene Ränderung dieser Determinanten (ab) (abc) $(abcd)$ etc. genau dieselbe wie bei unseren Betrachtungen, nur dass diese Determinanten keine symbolischen sind, sondern real aus den Coefficianten der gegebenen binären (ternären etc.) Formen gebildet sind.

Nimmt man den Gordan'schen [11] Satz zu Hülfe, dass alle Combinanten eines Systemes von m binären (ternären etc.) Formen gleicher Ordnung (d. h. diejenigen simultanen In-

varianten des Systemes, die sich bei Ersetzung der ursprünglichen Formen durch lineare Combinationen derselben nur um einen Faktor ändern) ganze Funktionen der aus den Coefficienten zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung sind, so kann man unser Princip im einfachsten Falle so ausdrücken:

Ein Strahlbüschel, der eine ebene rationale Curve R_n^2 in einer solchen Schaar (Involution) von Punktgruppen trifft, dass je zwei von ihnen in einer und derselben, vorgegebenen, projektivischen Beziehung zu einander stehen, heisse „ein in Bezug auf die R_n^2 zu sich selbst conjugirter Strahlbüschel".

Die Gleichung für den Ort der Büschelspitze erhält man so: „Sei die R_n^2 dargestellt durch

$$(27) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots a_{in} \quad (i = 1, 2, 3,)$$

so bilde man für irgend zwei binäre Formen n^{ten} Grades (etwa zwei der φ_i selbst) die Combinante, deren Verschwinden aussagt, dass die beiden Formen in der vorgegebenen Beziehung zu einander stehen, und ersetze jede Coefficientendeterminante $(A_i\ A_k)$ durch $|x\ A_i\ A_k|$, wo die x Coordinaten des Punktes und die A_i, A_k *) die resp. Verticalcoefficienten der drei φ_i sind."

Daraus ergiebt sich die Formulirung des Prinzipes für den allgemeinsten Fall von selbst.

Man bemerkt, dass in den oben gegebenen Anwendungen des Prinzips nur von der projektivischen Beziehung Gebrauch gemacht ist, dass die beiden Punktgruppen einen Punkt gemeinsam haben.

*) Fasst man diese als Coordinaten von Punkten auf, wie es bereits oben geschehen, und später noch weiter verfolgt werden soll, so tritt die Analogie des Prinzipes mit dem Hesse-Clebsch'schen noch mehr hervor. Dasselbe gilt für das erweiterte Prinzip.

Ausgedehntere Anwendungen ergeben sich zur Genüge im Laufe der Entwicklung: nur ein einfaches und sehr bekanntes Beispiel diene vorläufig zur Illustration des Gesagten.

17. Die einfachste Combinant-Invariante zweier cubischer binärer Formen (28) a_λ^3, b_λ^3 ist

$$(29)\quad (ab)^3 = (ab)_{03} - \frac{1}{3}(ab)_{12}$$

Ihr Verschwinden bedingt die Apolorität beider Formen.

Somit giebt es für eine R_3^2

$$(30)\quad \rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}$$

eine invariante Gerade

$$(31)\quad \Delta_{03} - \frac{1}{3}\Delta_{12} = |x\,A_0\,A_3| - \frac{1}{3}|x\,A_1\,A_2| = 0,$$

der Ort der Punkte, deren Strahlbüschel Punktgruppen ausschneiden, die zu einander apolar sind. Der Schnitt dieser Geraden mit der Curve wird bestimmt durch die Gleichung:

$$(32)\quad -\lambda^3\frac{\Delta_{012}}{3} + \Delta_{103}\lambda^2 + \Delta_{203}\lambda - \frac{\Delta_{302}}{3} = 0$$

deren Wurzeln die Argumente der drei Wendepunkte*) sind.

Bei der Erweiterung des Verfahrens auf den Raum erhält man [12]: durch jeden Punkt im Raume geht eine Ebene (Strahlbüschel), die die Osculationspunkte der drei vom gegebenen Punkte an eine feste Raumcurve dritter Ordnung

*) Dies ergibt sich auch unmittelbar aus dem bekannten [13]) Satze, dass, wenn von zwei zu einander apolaren, binären Formen n^{ter} Ordnung die eine eine n^{te} Potenz ist, $= (\lambda-\alpha)^n$, so ist $(\lambda-\alpha)$ ein Faktor der andern.

Daraus folgt für unsern Fall, dass, wenn sich in der Involution $a_\lambda^3 + \nu b_\lambda^3$ eine Potenz $(\lambda-\alpha)^3$ befindet, alle Formen des Systems den Faktor $(\lambda-\alpha)$ gemeinsam haben. Daher müssen die Schnittpunkte unserer invarianten Geraden mit der R_n^2 zugleich ihre Schnittpunkte mit den Wendetangenten sein, d. h. die Wendepunkte selber.

gehenden Osculationsebenen enthält (das Möbius'sche Nullsystem). Ist die Curve dargestellt durch

(33) $\rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}$

so ist das System dargestellt durch:

(34) $|x\, y\, A_0\, A_3| - \frac{1}{3}\, |x\, y\, A_1\, A_2| = 0$ oder entwickelt nach den Liniencoordinaten p_{ik}:

(35) $$\Sigma p_{ik} \begin{vmatrix} a_{l0} & a_{l3} \\ a_{m0} & a_{m3} \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\Sigma p_{ik} \begin{vmatrix} a_{l1} & a_{l2} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix} = 0$$

oder in abgekürzter Bezeichnung: (36) $\Sigma p_{ik}\,(\varphi_l\,\varphi_m)^3$

$$\equiv \Sigma p_{ik}\left\{(lm)_{03} - \frac{1}{3}\,(lm)_{12}\right\} = 0 \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4.)$$

§. 8

Weitere Entwicklung des linearen Schnittpunkttheorems mit Hülfe des Satzes $\Phi_{n,\mu} \equiv |\varphi_i(\lambda_1)\,\varphi_i(\lambda_2)\ldots\varphi_i(\lambda_\mu)| = D_\mu(\lambda)\,A_{n,\mu}$ $(i = 1, 2, \ldots \mu)$.

18. Dieser Satz behauptet die Zerlegbarkeit der Determinante der φ_i wo wieder

(1) $\varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{in}$

in zwei Faktoren, deren einer $D_\mu(\lambda)$ das Differenzenprodukt der μ Argumente λ_i ist, der andere A gleich der $(n+1)$-reihigen Determinante

$$A_{n,\mu} \equiv \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1\mu} & a_{1,\mu+1} & a_{1,\mu+2}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{k0} & a_{k1} & \ldots & a_{k,\mu} & a_{k,\mu+1}, & a_{k,\mu+2}, & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & & \ldots \\ \ldots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & & \ldots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_\mu & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \ldots & \alpha_{\mu-1}, & \alpha_\mu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \ldots & \alpha_{\mu-2}, & \alpha_{\mu-1}, & \alpha_\mu, & & 0\ldots 0 \\ \ldots & & \ldots & & \cdot & \cdot & & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \cdot & \cdot & & \ldots \end{vmatrix}$$

in der die α durch die Gleichung bestimmt sind:

$$(3)\ \psi(\lambda) \equiv \alpha_0 \lambda^\mu + \alpha_1 \lambda^{\mu-1} + \ldots \alpha_\mu \equiv \alpha_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_\mu)$$

Dass Φ das Differenzenprodukt $D(\lambda)$ als Faktor enthält, erhellt sofort daraus, dass Φ verschwindet, sobald zwei der λ_i einander gleich werden. Dass der zweite Faktor A in obige Form gebracht werden kann, hat Garbieri [14] nachgewiesen.

Wir wollen dies Resultat auf einem andern, höchst einfachen Wege nachweisen, der zugleich für die weiteren Entwicklungen äusserst fruchtbar ist.

Die Methode des Beweises wird hinlänglich an unserem alten Beispiele klar, für das $\mu = 3$, $n = 4$ ist. Wir knüpfen zu dem Zwecke wieder an die Entwicklungen des §. 2 an.

Zunächst ist

$$(4)\quad \Phi_{4,3} = |\varphi_i(\lambda_1)\ \varphi_i(\lambda_2)\ \varphi_i(\lambda_3)|\quad (i = 1, 2, 3)$$

die linke Seite der Bedingungsgleichung, die aussagt, dass drei Punkte mit den Argumenten

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der R_4^2: (5) $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0} \lambda^4 + a_{i1} \lambda^3 + \ldots a_{i4}$ auf einer Geraden liegen.

In §. 2 wurde die Bedingung aufgesucht, dass v i e r Punkte der R_4^2: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ auf einer Geraden liegen. Dies führte auf die Aufgabe, aus den Gleichungen

$$(6)\quad \rho s_r\ (-1)^r = u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \begin{Bmatrix} i, k, l = 1, 2, 3 \\ r = 0, 1, .. 4 \end{Bmatrix}$$

ρ und die u zu eliminiren. Hierbei waren die s_r die elementarsymmetrischen Funktionen der λ.

Soll dagegen jetzt die gesuchte Bedingung die sein, dass d r e i Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ in gerader Linie liegen, so haben wir aus demselben Gleichungssystem nebst ρ und den u noch λ_4 zu eliminiren. Zu dem Zweck hat man die s_r durch λ_4 und die elementarsymmetrischen Funktionen σ_v der drei Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auszudrücken. „D i e s k a n n a b e r g e s c h e h e n,

ehe man ρ und die u eliminirt hat oder auch nachher. So gelangt man zu zwei verschiedenen Formen der gesuchten Bedingung und somit auch zu zwei Formen für den Factor A, deren eine die Garbieri'sche ist, deren andere aber in engstem Zusammenhange mit den Gordan'schen Betrachtungen über Combinanten steht."

§. 9.

Erste Form des Faktors A.

19. Die s_r drücken sich, wie man sich leicht überzeugt (der allgemeine Beweis für derartige Zerlegungen folgt weiter unten) folgendermassen durch die σ_r und λ_4 aus:

$$(1) \begin{cases} s_0 = \sigma_0 + 0\ \lambda_4 & \left\{ \begin{matrix} s_0 = 1 \\ \sigma_0 = 1 \end{matrix} \right\} \\ s_1 = \sigma_1 + \sigma_0 \lambda_4 & \\ s_2 = \sigma_2 + \sigma_1 \lambda_4 & \\ s_3 = \sigma_3 + \sigma_2 \lambda_4 & \\ s_4 = 0 + \sigma_3 \lambda_4 & \end{cases}$$

Setzt man dies in das Gleichungssystem

$$(2) \quad \rho s_r (-1)^r = u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr}$$

ein, so kann man sofort die homogenen Variabeln

$$\rho,\ \rho\lambda_4,\ u_i,\ u_k,\ u_l$$

eliminiren. Ersetzt man im Eliminationsresultat die σ_ν wieder durch die Coefficienten des Ausdrucks

$$(3)\ \alpha_0 \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = \alpha_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

so werden die abwechselnden Vorzeichen, die vom Faktor $(-1)^r$ herrührten, aufgehoben und man erhält die gesuchte Bedingung in der Form:

$$(4)\quad 0 = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l0} & a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = A'_{4,3}$$

Nun ist

$$(5)\quad \Phi_{4,3} = D_3(\lambda)\, A_{4,3} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)\, A_{4,3} = 0$$

dieselbe Bedingung; da aber $A'_{4,3}$ im Falle des Gleichwerdens zweier λ nicht verschwindet, so ist

$$(6)\quad A'_{4,3} = C A_{4,3}$$

wo der Faktor C noch zu bestimmen ist.

Sowohl $A'_{4,3}$ als $A_{4,3}$ sind vom zweiten Grade in den $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so dass der Faktor C von diesen unabhängig ist.

Ferner sind beide vom ersten Grade in den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$; mithin hängt C auch von diesen nicht ab.

Entwickelt man endlich $\Phi_{4,3}$ nach den dreireihigen Determinanten, die man aus den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$ bilden kann, so ist z. B. der Faktor von

$$(7)\quad \Delta_{234} = \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \end{vmatrix} \text{ die Determinante}$$

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) = -D(\lambda)$$

d. h. der Faktor von Δ_{234} in $A_{4,3}$ ist $= -1$.

Entwickelt man ebenso A'_{43}, so ergiebt sich als Faktor von Δ_{234}

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} = \alpha_0^2$$

demnach ist (10) $-\dfrac{1}{\alpha_0^2} A'_{4,3} = A_{4,3}$, also

(11) $\Phi_{4,3} = | \varphi_1(\lambda_1)\ \varphi_1(\lambda_2)\ \varphi_1(\lambda_3) | = -D(\lambda) A_{4,3}$.

Man hat daher nur immer darauf zu achten, dass das Differenzenprodukt das richtige Vorzeichen erhält.

20. Es ist nun noch zu zeigen, wie sich diese Betrachtungen für den allgemeinen Fall der Zerlegung von $\Phi_{n,\mu}$ in $D(\lambda)\ A_{n,\mu}$ erweitern.

Was zunächst die Umformung der s_i betrifft, so zerlege man jetzt die n Argumente $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n$ in zwei Gruppen

$$(12) \begin{cases} \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_\mu \\ \lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2}, \ldots \lambda_n \end{cases}$$

von μ resp. $(n-\mu)$ Argumenten und bilde in beiden die bezüglichen elementarsymmetrischen Funktionen

$$(13) \begin{cases} \sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_\mu \\ \tau_0\ \tau_1 \ldots \tau_{n-\mu} \end{cases}$$

dann gilt die allgemeine Formel [15]:

$$(14) \quad s_k = \tau_0\ \sigma_k + \tau_1\ \sigma_{k-1} + \tau_2\ \sigma_{k-2} + \ldots\ \tau_{n-\mu}\ \sigma_{k-(n-\mu)}$$

wo nur zu beachten ist, dass für alle σ, deren Index negativ wird, der Werth 0 einzusetzen ist.

Angenommen, diese Formel sei erwiesen, so setze man diese Werthe der s_k $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ in das Gleichungssystem

$$(15) \quad \rho s_k (-1)^k = u_1\ a_{1,k} + u_2\ a_{2,k} + \ldots\ u_\mu\ a_{\mu,k}$$

ein und eliminire die Grössen

$$\rho\tau_0, \rho\tau_1, \ldots \rho\tau_{n-\mu}, u_1, u_2, \ldots u_\mu.$$

Ersetzt man dann im Eliminationsresultat die σ durch die Coefficienten der Form

$$(16) \quad \psi(\lambda) \equiv \alpha_0\ \lambda^\mu + \alpha_1\ \lambda^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$(17) \quad A'_{n,\mu} = 0$$

Jetzt schliesst man weiter, wie oben:

$A'_{n,\mu}$ und $A_{n,\mu} = \frac{\Phi_{n,\mu}}{D_\mu(\lambda)}$ sind vom Grade $n+1-\mu$ in den μ Argumenten λ und vom ersten in den μ-reihigen Determinanten der Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$. Der Faktor C, um den sich $A_{n,\mu}$ und $A'_{n,\mu}$ unterscheiden wird daher bestimmt, indem man zwei entsprechende Glieder aufsucht, z. B. die beiden constanten Glieder. Er ergiebt sich gleich $+$ resp. $- \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}}$

so dass schliesslich

$$(18) \quad \Phi_{n,\mu} = \pm D(\lambda) A_{n,\mu}$$

Man kann das doppelte Vorzeichen vermeiden, wenn man $D(\lambda)$ gleich der Determinante

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1^{\mu-1} & \lambda_2^{\mu-1} & \dots & \lambda_\mu^{\mu-1} \\ \lambda_1^{\mu-2} & \dots & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 \end{vmatrix}$$

nimmt, so dass es immer dasselbe Vorzeichen erhält wie das Glied

$$(20) \quad \lambda_1^{\mu-1} \,.\, \lambda_2^{\mu-2} \,.\, \lambda_3^{\mu-3} \dots . 1$$

und zugleich $A_{n,\mu}$ in der Form schreibt:

$$(21)\, A_{n,\mu} = \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots\dots & \alpha_\mu & 0 & 0 \dots . 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \dots & \alpha_{\mu-1} & \alpha_\mu & 0 \dots . 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \dots\dots & \alpha_\mu & 0 \,.\,.\, 0 \\ \dots\dots & & & & & \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \dots\dots\dots & & a_{in} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \dots\dots\dots & & a_{kn} \\ \dots\dots & & & & & \end{vmatrix}$$

dann ist immer

$$(22) \quad \Phi_{n,\mu} = + D(\lambda) A_{n,\mu}$$

---

21. Es erübrigt noch der Beweis der Beziehung:

(14) $s_k = \tau_0 \sigma_k + \tau_1 \sigma_{k-1} + \tau_2 \sigma_{k-2} + \cdots \tau_{n-\mu} \sigma_{k-(n-\mu)}$.

s_k ist ganz und linear, sowie symmetrisch in den Argumenten der Gruppe $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\mu)$, wie in denen der andern $(\lambda_{\mu+1} \lambda_{\mu+2} \ldots \lambda_n)$ ist daher nach einem bekannten Satze als ganze lineare Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen jeder der beiden Gruppen darstellbar: d. h. s_k ist eine ganze bilineare Funktion der σ und τ. Andrerseits ist s_k vom Gewichte k d. h. jedes Glied von s_k besteht aus k Faktoren λ. Dasselbe Gewicht muss jeder Summand $\sigma_\alpha \tau_\beta$ der bilinearen Funktion besitzen, d. h. $\alpha + \beta$ ist $= k$ und man erhält so zunächst:

(15) $s_k = \beta_0 \tau_0 \sigma_k + \beta_1 \tau_1 \sigma_{k-1} + \cdots \beta_{n-\mu} \tau_{n-\mu} \sigma_{k-n-\mu}$

wo die β noch zu bestimmende Zahlenfaktoren sind.

Irgend ein Glied des Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ kann in keinem andern Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ auftreten, da es ja gerade α Faktoren λ aus der ersten Gruppe enthält.

Andrerseits kann dasselbe aber überhaupt nur einmal in s_k also auch in $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ auftreten, so dass $\beta_{k-\alpha} = 1$ d. h. alle $\beta_{k-\alpha}$ sind $= 1$, deren zugehörige Faktoren $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ überhaupt Glieder von s_k enthalten.

Ausgeschlossen sind erstens die, wo der Index $k-\alpha$ grösser als k d. h. wo α negativ ist; diese können überhaupt nicht auftreten, d. h. ihr Coefficient β ist $= 0$.

Dasselbe gilt von den Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$, für die α grösser als μ ist d. h. für die $k-\alpha$ kleiner als $k-\mu$ ist.

Demnach ist

(14) $s_k = \tau_0 \sigma_k + \tau_1 \sigma_{k-1} + \cdots \tau_{n-\mu} \sigma_{k-(n-\mu)}$

unter der Festsetzung, dass alle σ mit einem Index, der grösser als μ oder kleiner als 0 ist, gleich 0 zu setzen sind.

§. 10.

Zweite Form des Faktors A.

22. Auch diese wollen wir erst an unserem Beispiel der R_4^2 darlegen. Wir werden also aus dem Gleichungssystem

$$(1)\quad \rho s_r(-1)^r = u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \begin{Bmatrix} r = 0, 1, .\, 4 \\ i, k, l, = 1, 2, 3 \end{Bmatrix}$$

die u nebst ρ eliminiren, im Resultate die s_r durch die σ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) und λ_4 ausdrücken, und endlich aus den so gewonnenen Gleichungen wieder λ_4 eliminiren.

Die erste Elimination führt nach §. 3 zum linearen Schnittpunkttheorem der R_4^2:

$$(2)\quad \begin{cases} a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + \ldots . + a_4\, s_4 = 0 \\ b_s \equiv b_0\, s_0 + b_1\, s_1 + \ldots . + b_4\, s_4 = 0 \end{cases}$$

wo die $(ab)_{ik}$ den aus den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$ gebildeten Determinanten Δ_{lmn} proportional sind.

Die Ersetzung der s_r durch σ_ν und λ_4 in $a_s = 0$, $b_s = 0$, verbunden mit der Elimination von λ_4 liefert als Bedingung, dass drei Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ der R_4^2 auf gerader Linie liegen, (3)

$$\begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\sigma_3, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\sigma_3, & b_1\sigma_0 + b_2\sigma_1 + b_3\sigma_2 + b_4\sigma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die linke Seite dieser Gleichung mit der Form $A_{4,3}$ identisch ist, abgesehen von dem Proportionalitätsfaktor, um den sich die $(ab)_{ik}$ und Δ_{lmn} unterscheiden.

Führt man die ersten Differentialquotienten der Formen

$$(4)\quad \begin{cases} a_\lambda = a_0\, \mu^4 + 4\, a_1\, \lambda\mu^3 + \ldots + a_4\, \lambda^4 \equiv f \\ b_\lambda = b_0\, \mu^4 + 4\, b_1\, \lambda\mu^3 + \ldots + b_4\, \lambda^4 \equiv \varphi \end{cases}$$

und bezeichnet sie mit $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$, so ist z. B.

„$a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3$“ die nach den drei Argumenten λ_1, λ_2, λ_3 polarisirte Form f_2, oder was dasselbe ist (cf. §. 5) gleich $\frac{1}{\alpha_0}\,(f_2\,\alpha_\lambda^3)^3$ wo

$$(5)\;\psi = \alpha_\lambda^3 = \alpha_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \alpha_0\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_3$$

und $(f_2\,\alpha_\lambda^3)^3$ die dritte Überschiebung der Formen f_2 und α_λ^3 repräsentirt.

Daher ist, wenn $\Delta_{lmn} = \rho\,(ab)_{ik}$, (6) $A_{4,3} =$

$$\frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l0} & a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} (f_1\psi)^3 & (f_2\psi)^3 \\ (\varphi_1\psi)^3 & (\varphi_2\psi)^3 \end{vmatrix} = \frac{|\varphi_1(\lambda_1)\varphi_1(\lambda_2)\varphi_1(\lambda_3)|}{D_3(\lambda)}.$$

Es möge hier, ehe wir zum analogen Ausdruck für $A_{n,\mu}$ übergehen, eine Bemerkung Platz finden, die später von Nutzen sein wird.

Wir gelangten zu beiden Formen von $A_{4,3}$ mit Hülfe der Zerlegungen:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{rcll} s_0 &=& \sigma_0 + 0.\,\lambda_4 & \lambda^4 \\ -\,s_1 &=& -\,\sigma_1 - \sigma_0\,\lambda_4 & \lambda^3\mu \\ s_2 &=& \sigma_2 + \sigma_1\,\lambda_4 & \lambda^2\mu^2 \\ -\,s_3 &=& -\,\sigma_3 - \sigma_2\,\lambda_4 & \lambda\mu^3 \\ s_4 &=& \sigma_4 + \sigma_3\,\lambda_4 & \mu^4 \end{array}\right.$$

Führen wir die angedeutete Multiplication aus, so kommt

$$\begin{aligned}(8)\quad (s_0\,\lambda^4 - s_1\lambda^3\,\mu + s_2\lambda^2\mu^2 - s_3\lambda\mu^3 + s_4\mu^4) &= \\ \lambda\,(\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\,\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3)& \\ -\,\lambda_4\cdot\mu(\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\,\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3)& \\ (\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3)\,\{\lambda - \lambda_4\mu\}& \\ = \frac{1}{\alpha_0}\,\psi(\lambda)\,\{\lambda-\lambda_4\,\mu\}.&\end{aligned}$$

Fassen wir hier λ_4 als beweglich auf, so stellt dies die linke Seite einer Involution vierten Grades mit der festen cubischen Form $\psi(\lambda)$ dar. Bezeichnet man als Coefficienten einer binären Involution

$$a_\lambda^n + k\, b_\lambda^n$$

die Determinanten $(ab)_{ik}$ (von denen allein ja alle invarianten Eigenschaften der Involution abhängen), so erkennt man durch die Entwicklung von $A_{4,3}$ nach den Δ_{lmn} resp. $(ab)_{ik}$ den Satz:

„Die Bedingung, dass drei Punkte einer R_4^2 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (Wurzeln der Gleichung $\psi(\lambda) = 0$) auf einer Geraden liegen, lässt sich in die Form bringen:

$$(9)\quad 0 = A_{4,3} = \Sigma_{ik}\, p_{ik}\, (ab)_{ik} \equiv \Sigma_{ik}\, p_{ik}\, \Delta_{lmn} = 0$$

wo die p_{ik} die Coefficienten einer Involution vierten Grades mit gemeinsamer cubischer Form $\psi(\lambda)$ sind."

23. Gehen wir jetzt zum allgemeinen Fall über, so haben wir im linearen Schnittpunkttheorem einer $R_n^{\mu-1}$

$$(10)\quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\, \lambda^n + \alpha_{i1}\, \lambda^{n-1} + \ldots a_{in} \quad (i = 1, \ldots \mu)$$

das aus $(n + 1 - \mu)$ Gleichungen

$$(11)\quad a_s = 0,\ b_s = 0,\ c_s = 0, \ldots \quad (n + 1 - \mu)_s = 0$$

besteht, die $n - \mu$ Argumente

$$\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2}, \ldots \lambda_n$$

zu eliminiren.

Mit Hülfe der Relationen (cf. Nr. 21)

$$(12)\quad s_k = \tau_0\, \sigma_k + \tau_1\, \sigma_{k-1} + \ldots \quad \tau_{n-\mu}\, \sigma_{k-(n-\mu)}$$

geht eine Form

$$(13)\quad a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + \ldots a_n\, s_n$$

über in:

$$(14)\quad \tau_0\, (a_0\, \sigma_0 + a_1\, \sigma_1 + a_2\, \sigma_2 + \cdot + a_\mu\, \sigma_\mu)$$
$$+ \tau_1\, (a_1\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_1 + a_3\, \sigma_2 + \cdot + \alpha_{\mu+1}\, \sigma_\mu)$$

$+ \dots\dots$

$+ \tau_{n-\mu} (a_{n-\mu} \sigma_0 + a_{n-\mu+1} \sigma_1 + a_{n-\mu+2} \sigma_2 + \dots + a_n \sigma_\mu)$

oder nach den σ geordnet in:

$$\sigma_0 (a_0 \tau_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + \dots + a_{n-\mu} \tau_{n-\mu})$$
$$+ \sigma_1 (a_1 \tau_0 + a_2 \tau_1 + a_3 \tau_2 + \dots + a_{n-\mu+1} \tau_{n-\mu})$$
$$+ \dots\dots$$
$$+ \sigma_\mu (a_\mu \tau_0 + a_{\mu+1} \tau_1 + a_{\mu+2} \tau_2 + \dots + a_n \tau_{n-\mu}).$$

Die Klammercoefficienten sind die nach μ Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ polarisirten μ^{ten} Differentialquotienten von a_λ resp. die nach $(n-\mu)$ Argumenten polarisirten $(n-\mu)^{ten}$ Differentialquotienten von a_λ oder auch, wenn diese Argumente als Wurzeln der Formen $\psi \equiv \alpha_\lambda^\mu$ resp. $\chi \equiv \beta_\lambda^{n-\mu}$ betrachtet werden, die μ^{ten} resp. $(n-\mu)^{ten}$ Ueberschiebungen der bezüglichen Differenzialquotienten über diese beiden Formen.

Bezeichnet man die μ^{ten} Differentialquotienten von

$$a_\lambda \equiv f_0 \text{ mit } f_0^0, f_0^1, f_0^2, \dots f_0^\mu$$

entsprechend die der andern Formen

$$b_\lambda \equiv f_1, \quad c_\lambda \equiv f_2, \dots (n+1-\mu)_\lambda \equiv f_{n-\mu}$$

so ergiebt sich durch Elimination der τ bei Benützung der ersten Entwicklung einer Form a_s:

$$(15)\ 0 = \left| (f_i^0\psi)^\mu, (f_i^1\psi)^\mu, (f_i^2\psi)^\mu, \dots (f_i^{(n-\mu)}\psi)^\mu \right| \quad (i = 0, 1, \dots n-\mu)$$

und man hat wie oben

$$(16)\ A_{n,\mu} \equiv \frac{\rho}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \left| (f_i^0\psi)^\mu, (f_i^1\psi)^\mu, \dots (f_i^{(n+\mu)}\psi)^\mu \right|$$
$$= \frac{\left| \varphi_i(\lambda_1)\ \varphi_i(\lambda_2) \dots \varphi_i(\lambda_\mu) \right|}{D_\mu(\lambda)}$$

Ferner ergiebt sich, wie oben: (17)

$$A_{n,\mu} = 0 = \Sigma \; p_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{n-\mu}} \; \Delta_{i_{n-\mu+1} i_{n-\mu+2} \dots i_{n+1}}$$

wo die Δ die Determinantencoefficienten der Gruppe

$$(18)\ u_1 \varphi_1(\lambda) + u_2 \varphi_2(\lambda) + \dots u_\mu \varphi_\mu(\lambda)$$

und die p die entsprechenden Coefficienten der Gruppe

$$(19)\quad \psi_\mu \{v_0 \gamma_0 + v_1 \gamma_1 + \ldots v_{n-\mu} \gamma_{n-\mu}\},$$

wo die v (wie die u) willkürliche Parameter und die γ beliebige binäre Formen $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grades vorstellen.

Nach dem Grassmann'schen Satze kann man wieder statt der Δ die entsprechenden Determinanten der Schnittpunkttheoremgruppe

$$(20)\quad a_s, b_s, c_s, \ldots (n+1-\mu)_s$$

substituiren.

§. 11.

Zusammenhang der zweiten Form von

$$A_{n,\mu} = \left| (f_1^0 \psi)^\mu (f_1^1 \psi)^\mu, \ldots (f_1^{(n-\mu)} \psi)^\mu \right|$$

mit den Gordan'schen Untersuchungen über Combinanten.

24. Gordan's [16] erster Satz über Combinanten binärer Formen (auf die wir uns hier beschränken) lautet:

„Eine jede Combinante einer Anzahl binärer Formen n^{ten} Grades:

$$(1)\quad \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \varphi_\mu(\lambda)$$

ist eine Invariante der binären Form von μ Variabeln

$$(2)\quad \Phi_{n,\mu} = \left| \varphi_i(\lambda_1), \varphi_i(\lambda_2) \ldots, \varphi_i(\lambda_\mu) \right| \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

(und ist folglich eine ganze Funktion der μ-reihigen Determinantencoefficienten der φ_i)." Der umgekehrte Satz gilt selbstverständlich, da $\Phi_{n,\mu}$ resp. $A_{n,\mu}$ selbst eine Combinante der $\varphi(\lambda)$ ist, also auch jede Invariante von Φ resp. A eine Combinante der $\varphi(\lambda)$. Es lässt sich $\Phi_{n,\mu}$ einfacher durch $A_{n,\mu}$ ersetzen, wo

$$(3)\quad \Phi_{n,\mu} = D_\mu(\lambda)\, A_{n,\mu}$$

Der geometrische Sinn dieses Satzes ist sehr einfach, wir wollen ihn wieder zunächst für den Fall $\mu = 3$ erläutern.

Dann stellen alle Combinanten der drei Formen $\varphi_i(\lambda), = 0$

gesetzt, geometrische Eigenschaften resp. Gebilde dar, die zur Curve

$$(4)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda)$$

in projektivisch unzerstörbarer Beziehung stehen.

Die letztere ist aber dadurch völlig charakterisirt, dass sowohl die Punkte der Ebene, als die Geraden derselben einander eindeutig zugeordnet sind. Das letztere findet aber statt, wenn irgend drei Punkten auf gerader Linie andere drei Punkte in gerader Linie entsprechen.

Daher hängen alle projektivisch unzerstörbaren Eigenschaften der R_n^2 allein von der Bedingung ab, die aussagt, wann drei Punkte derselben in gerader Linie liegen d. h. von der Gleichung

$$(5)\ \Phi_{n,\mu} = 0 \text{ resp. } A_{n,\mu} = 0$$

ab. Genau das Analoge gilt offenbar von der $R_n^{\mu-1}$, nur dass statt der Geraden hier ein Lineargebilde

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_\mu x_\mu = 0$$

an die Stelle tritt.

25. Für $A_{n,\mu}$ sind beide, von uns abgeleitete Formen zulässig, wir fassen jetzt die zweite in's Auge.

Der zweite Gordan'sche Satz [17] lautet:

„Eine jede Combinante von μ binären Formen n^{ter} Ordnung

$$(6)\ \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \varphi_\mu(\lambda)$$

ist eine Invariante der binären Form mit $(n-\mu+1)$ Variabeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-\mu+1}: \qquad (7)$$

$$B_{n,\mu} = \left|(\varphi_{i1}\chi)^{n-\mu+1}, (\varphi_{i2}\chi)^{n-\mu+1}, \ldots (\varphi_{i\mu}\chi)^{n-\mu+1}\right| (i=1,2,\ldots\mu)$$

wo $\chi(\lambda) = \alpha_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_{n-\mu+1})$,

ferner φ_{ir} der $(\mu-1)^{te}$ Differentialquotient von $\varphi_i(\lambda, \mu)$ ist, $(\mu-r)$mal nach λ, $(r-1)$mal nach μ genommen,

und $(\varphi_{1r}, \chi)^{n-\mu+1}$ die $(n-\mu+1)^{te}$ Ueberschiebung der Formen φ_{1r} und χ darstellt."

$B_{n,\mu}$ ist hier evidenter Weise eine Combinante der $\varphi(\lambda)$, also umgekehrt auch jede Invariante von $B_{n,\mu}$ eine Combinante der $\varphi(\lambda)$."

26. Dieser zweite Gordan'sche Satz leitet sich aber ohne Mühe aus dem ersten mit Hülfe der früheren Betrachtungen über die Reciprocität des Schnittpunkttheorems (§. 4) und der zweiten Form von $A_{n,\mu}$ ab.

Der Inhalt jener Reciprocität lässt sich mit Rücksicht auf die Ableitung dieser Form von $A_{n,\mu}$ kurz so aussprechen:

„Die Form $A_{n,\mu} = \left| (f_1^0\, \psi)^\mu, (f_1^1\, \varphi)^\mu, \ldots (f_1^{(n-\mu)} \psi)^\mu \right|$ verhält sich zur Gruppe der φ_k $(k = 1, \ldots \mu)$ gerade so wie die Form

$$B_{n,\mu} = \left| (\varphi_{11}\chi)^{(n-\mu+1)}, (\varphi_{12}, \chi)^{(n-\mu+1)}, \ldots (\varphi_{1\mu}, \chi)^{n-\mu+1} \right|$$

zur Gruppe der f_i $(i = 0, 1, \ldots n-\mu)$."

(Dabei sind die f die Schnittpunktformen der φ, und umgekehrt.)

Nun ist zu Folge des ersten Gordan'schen Satzes jede Combinante der μ Formen φ eine Invariante von $A_{n,\mu}$ (zweite Form), also auch evidenter Weise eine Combinante der $(n+1-\mu)$ Formen f, mithin unter nochmaliger Anwendung des ersten Gordan'schen Satzes eine Invariante von $B_{n,\mu}$. Dies ist aber der zweite Gordan'sche Satz.

Mit Weglassung der Zwischenformen $A_{n,\mu}$ resp. $B_{n,\mu}$ können wir demnach den Inhalt beider Hauptsätze so zusammenfassen:

„Jede Combinante der μ Formen φ ist eine Combinante der $(n+1-\mu)$ Schnittpunktformen f und umgekehrt *)."

*) vgl. die historische Bemerkung der Einleitung.

Man wird daher mit Vortheil immer die Form $A_{n,\mu}$ resp. $B_{n,\mu}$ zu Grunde legen, die aus der kleineren Anzahl von Formen gebildet ist.

Um diese Sätze auf die rationalen Curven anwenden zu können, genügen einige Bemerkungen.

Eine jede solche Curve lässt sich bekanntlich immer eindeutig, Punkt für Punkt auf eine Gerade abbilden und die Darstellungsfunktionen $\varphi(\lambda)$ lassen sich nach Lüroth[18] immer in eine solche Form bringen, dass jedem Punkt der Curve resp. Geraden immer nur ein Argument λ zugehört. (Es werden uns weiterhin noch Beispiele solcher Umformungen begegnen.)

Daher ist eine jede nicht zerfallende rationale Curve R_n^d als Interpretationsgebiet der Invariantentheorie binärer Formen zulässig. Dann sind offenbar die simultanen Invarianten und Covarianten der dargestellten Formen unabhängig von einer Collineation des Raumes, in dem sich die rationale Curve befindet.

Wie weit aber umgekehrt alle Eigenschaften der rationalen Curve, die bei Collineationen des bezüglichen Raumes invariant bleiben, von den Invarianten binärer Formen abhängen und was für specielle Raumcollineationen mit den linearen Transformationen auf rationalen Curven verknüpft sind, diese allgemeine Frage möge verschoben bleiben, bis erst ein hinreichendes Material gewonnen ist, das diesen abstrakten Untersuchungen eine concrete Unterlage gewähren soll.

Vor allem soll erst das wichtigste Hülfsmittel des Folgenden, die Theorie der Normcurven, in kurzen Zügen, nur soweit es erforderlich, abgehandelt werden; dabei wird sich schon, und dies allmählich in steigendem Masse der grosse Nutzen herausstellen, den der Gebrauch der in diesem Capitel erörterten Prinzipien und Sätze, vor allem des letzten gewährt

In den einzelnen Fällen wird sich auch die eben aufgeworfene Frage leichter übersehen und beantworten lassen.

Den Abschluss dieses Capitels bilde ein Satz, der einen unmittelbaren Ausfluss des letzten Satzes bildet, und der zwar implicite schon in den Untersuchungen der früheren Paragraphen enthalten ist, jedoch noch nicht mit der nöthigen Schärfe betont ist und der kurz so ausgesprochen werden kann (mit der Beschränkung auf binäre Formen, wenn dies auch nicht erforderlich ist):

„Die Funktionaldeterminanten conjugirter Gruppen binärer Formen sind dieselben."

In der That gehen wir wieder von der R_n^d aus:

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 0 \ldots d) = a_{in}\lambda^n + \ldots a_{i0}$$

mit den Schnittpunktsrelationen

$$\alpha_{1s} = 0, \alpha_{2s} = 0, \ldots \alpha_{n-d,s} = 0$$

so folgt zunächst aus dem Früheren augenblicklich, dass die Forderung, es sollen n benachbarte Punkte λ der Curve sich auf einem Lineargebilde d^{ter} Stufe befinden, so viel Lösungen λ zulässt, als die Funktionaldeterminante der Formen:

$$\alpha_{1\lambda}, \ \alpha_{2\lambda}, \ldots \alpha_{n-d,\lambda}$$

Wurzeln hat.

Andererseits erhält man diese Forderung auch im Verschwinden der Determinante der $\varphi_i(\lambda)$ ausgedrückt, wenn man in den einzelnen Columnen derselben für λ die Werthe setzt

$$\lambda, \ \lambda + d\lambda, \ \lambda + 2d\lambda + d\lambda^2 \text{ etc.} \ldots$$

Diese geht aber, wie z. B. Clebsch[19] öfters an einzelnen Fällen nachgewiesen hat, mittelst der gleichen Methode, indem man nur noch nebst den gewöhnlichen Umformungen von Determinanten solcher Art den Euler'schen Satz über die Darstellung binärer Formen mittelst ihrer (nach zwei homogenen Variabeln) genommenen Differentialquotienten wiederholt anwendet, in die Funktionaldeterminante der Formen $\varphi_i(\lambda)$ über.

Beide Funktionaldeterminanten sind vom Grade $(d+1)(n-d)$ in λ und vom ersten in den Determinanten der a resp. α, die nach §. 1 proportional sind. Also unterscheiden sich beide nur noch um einen unwesentlichen Faktor, den man meistens der Bequemlichkeit wegen gleich 1 setzen darf.

Dieser einfache Satz ist namentlich einer der kräftigsten Hebel zur Erforschung geometrischer Wahrheiten mittelst algebraischer Behandlung, wie sich des Weiteren zur Genüge ergeben wird.

Capitel II.

Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven.

Abschnitt I.

Die Normcurven (speziell der Ebene und des Raumes).

§. 12.

Der Normkegelschnitt der Ebene.

28. Wenn auch dieser Abschnitt mancherlei Bekanntes[20] enthalten wird, so fehlt, so viel ich weiss, doch eine systematische Zusammenstellung der Haupt-Sätze dieser Theorie, die bezweckt, die Bestimmung der Lage der Punkte (Geraden, Ebenen, überhaupt Lineargebilde) in der Ebene, im Raume (und höheren Mannigfaltigkeiten) von fest gedachten Curven (dem Normkegelschnitt der Ebene, der cubischen Normcurve des Raumes, allgemein der rationalen Normcurve n^{ter} Ordnung im Raume von n Dimensionen) abhängig zu machen. Und zwar erweist es sich weiterhin im Laufe der Untersuchungen als höchst vortheilhaft, diese Normcurven nicht ganz beliebig zu wählen, sondern sie gewissen (Apolaritäts-) Bedingungen zu unterwerfen, ähnlich wie man die gewöhnlichen Coordinatensysteme den gerade vorliegenden Aufgaben gemäss möglichst bequem einrichtet. Es wird im Folgenden wesentlich auf eine geschickte Bezeichnungsweise ankommen.

29. Wir denken uns in der Ebene ein festes Dreieckscoordinatensystem und bezeichnen als Normkegelschnitt (N_2)

$$(1)\ \rho x_2 = \lambda^2,\ \rho x_1 = 2\lambda,\ \rho x_0 = 1,$$

wo (ρ ein beliebiger Faktor und) λ ein variabler Parameter ist. (cf. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Art. 305.)

Die gewöhnliche Gleichungsform wird dann unmittelbar

$$(2)\ 4x_0\, x_2 - x_1^2 = 0.$$

Umgekehrt kann bekanntlich *) ein beliebiger (nicht zer-

---

*) Man sieht dies auch aus der allgemeinsten Parameterdarstellung des Kegelschnitts, der jeder (nicht zerfallende) Kegelschnitt vermöge seiner projektivischen Erzeugung fähig ist:

$$\rho x_i = a_{i2}\,\lambda^2 + a_{i1}\,\lambda + a_{i0}\ (i = 0,\ 1,\ 2),$$

indem man auf die Punkte der Ebene eine Lineartransformation anwendet, deren Coefficienten die resp. Unterdeterminanten des Systems der a sind. Dann ergiebt sich auch sofort rückwärts mit Rücksicht auf die Gleichungen (1 und 2) als Gleichung dieses Kegelschnitts in den alten Coordinaten x:

$$0 = \begin{vmatrix} x_i & a_{i2} & a_{i1} \\ x_k & a_{k2} & a_{k1} \\ x_l & a_{l2} & a_{l1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i & a_{i1} & a_{i0} \\ x_k & a_{k1} & a_{k0} \\ x_l & a_{l1} & a_{l0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_i & a_{i2} & a_{i0} \\ x_k & a_{k2} & a_{k0} \\ x_l & a_{l2} & a_{l0} \end{vmatrix}^2.$$

Dies kann man auch noch auf eine zweite Art sehr leicht ableiten, die auch bei ähnlichen Elimininationsaufgaben oft angewandt werden kann.

Man sehe in den drei Gleichungen der allgemeinen Parameterdarstellung des Kegelschnitts zunächst die Potenzen von λ als Unbekannte in der Art an:

$$\frac{\lambda^2}{\rho} = l_2\ \ \frac{\lambda}{\rho}, = l_1,\ \frac{1}{\rho} = l_0,$$

berechne die drei nicht homogenen Unbekannten in der gewöhnlichen Weise und wende dann erst wieder die den l zukommende Identität:

$$l_0\, l_2 - l_1^2 = 0$$

an.

So einfach diese beiden Methoden erscheinen mögen, so vergleiche man doch z. B. die mühsame Methode Salmons (Höhere ebene Curven pg. 53), die zum mindesten die charakteristische Form des Endresultats schlecht erkennen lässt.

Dasselbe Verfahren ist zunächst auf die allgemeine Parameter-

fallender) Kegelschnitt der Ebene in dieser Form dargestellt werden, wenn nur das Coordinatensystem passend gewählt wird (d. i. wenn man zwei Tangenten und die Berührungssehne des Kegelschnitts zu Seiten des Coordinatendreiecks nimmt). Die Form (1) sagt aus, dass jedem Punkte des Kegelschnitts (oder auch seiner Tangente) ein bestimmter Werth von λ zukommt und umgekehrt. Daher ist es weiterhin erlaubt, einfach von einem Punkte (resp. Tangente) „λ" des Normkegelschnitts zu sprechen.

Eine beliebige Gerade der Ebene:

$$(3)\quad u_x \equiv u_2 x_2 + u_1 x_1 + u_0 x_0 = 0$$

trifft N_2 in dem Punktepaar der quadratischen Gleichung (wie es der Kürze wegen lauten mag):

$$(4)\quad u_\lambda \equiv u_2 \lambda^2 + 2u_1 \lambda + u_0 = 0.$$

Seien die Wurzeln dieser Gleichung α, β und

$$(5)\quad \alpha + \beta = \frac{s_1}{s_0}, \qquad \alpha\beta = \frac{s_2}{s_0},$$

so folgt aus (4) für die Coordinaten der Geraden:

$$(6)\ \tau u_2 = s_0,\ \ \tau u_1 = -\frac{s_1}{2},\ \ \tau u_0 = s_2$$

(wo τ ein beliebiger Faktor *) sei).

Die Gerade wird (und nur dann) zur Tangente für $\alpha = \beta = \lambda$, daher ist die zu (1) dualistische Darstellung (in Liniencoordinaten):

---

darstellung der cubischen Raumcurve (cf. §. 13) und ihr Flächennetz zweiter Ordnung, sowie überhaupt in derselben Weise auf die rationale Curve n^{ter} Ordnung im Raume von n Dimensionen anwendbar.

Dabei zeigt sich noch der merkwürdige Umstand, den wir hier vorerst nur angeben wollen, dass die Curve

$$\rho x_i = m_i \lambda^i \ (i = 0, 1, \ldots d)$$

in Wirklichkeit nur von $(d-1)$ Grössen (passenden Quotienten der d) abhängt, während die scheinbare Abzählung deren d liefert.

*) Dieser Zusatz mag bei ähnlichen Fällen von jetzt ab unterbleiben.

$$(7)\ \tau u_2 = 1, \quad \tau u_1 = -\lambda, \quad \tau u_0 = \lambda^2$$

oder in gewöhnlicher Form:

$$(8)\ u_0 u_2 - u_1^2 = 0.$$

Verfährt man jetzt wieder, wie oben mit (1), indem man (7) mit der Gleichung eines Punktes combinirt, so erhält man, parallel den Gleichungen (6):

$$(9)\ \rho x_2 = s_2, \quad \rho x_1 = s_1, \quad \rho x_0 = s_0.$$

Die in (5) eingeführten Grössen $\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}$ nennt man gewöhnlich die elementar-symmetrischen Funktionen der zwei Grössen α, β; ich bezeichne, weil sich dies weiterhin als nützlich herausstellt, die Grössen s_0, s_1, s_2 (oder genauer $\rho s_0, \rho s_1, \rho s_2$ wo ρ variabel) als die homogenen symmetrischen Funktionen von zwei Grössen (Werthen, Parametern, Argumenten) α, β. (Treten weiterhin mehrere Reihen solcher Funktionen auf, so seien sie bezeichnet mit s_0, s_1, s_2 resp. $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, resp. S_0, S_1, S_2, resp. τ_0, τ_1, τ_2 etc. oder auch kurz mit $s_i, \sigma_i, S_i, \tau_i$ etc.)*) Dann können wir unser bisjetziges Formelsystem in folgenden Satz kleiden:

A) „Der Normkegelschnitt der Ebene, als Ordnungscurve aufgefasst (in diesem Sinne sei er mit N_2 bezeichnet) ist dargestellt durch die Gleichungen (1) resp. (2); dagegen als Klassencurve (und, sofern dies hervorgehoben werden soll, sei sein Zeichen N_2) durch die Gleichungen (7) resp. (8).

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene sind durch (9), die einer beliebigen Geraden durch (6)**) repräsentirt, wo die s_i die

*) Dieselbe Bemerkung (und Bezeichnung) soll für die symmetrischen Funktionen von drei und mehr Werthen α, β, γ, etc. (eines Parameters) gelten.

**) Ist in (6) und (9) das Argumentenpaar beidemal dasselbe, so ist der Punkt (9) der Pol der Geraden (6), wie auch aus Gleichung (2) direkt folgt.

homogenen symmetrischen Funktionen der beiden Parameter sind, die den vom Punkte an N_2 ausgehenden Tangenten resp. den auf N_2 durch die Gerade ausgeschnittenen Punkten angehören."

Die Einführung des Normkegelschnitts hat daher die grosse Bequemlichkeit zur Folge, die Coordinaten eines Punktes der Ebene unmittelbar mit den homogenen symmetrischen Funktionen zweier Werthe (eines variabeln Parameters) identificiren zu können.

§. 13.

Die cubische Normcurve des Raumes.

Ich mache hier schon auf die Abhandlung von Herrn Sturm: „Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve" (Crelle Bd. 86) aufmerksam, die unserem Gegenstande, namentlich in diesem Abschnitte sehr verwandt ist. Es liess sich nicht vermeiden, um das Verständniss nicht zu erschweren, manche Sätze, die dort schon vorgetragen sind, noch einmal (wenn auch meistens anders und in anderem Zusammenhange, abgesehen von dem mancherlei Neuen) zu beweisen. Nur so liess sich eine, wenn auch sehr gedrängte, Systematik erreichen. Ich citire jene Abhandlung im Folgenden einfach mit Sturm.

Im Übrigen möchte ich dabei betonen, dass mir die Interpretation der binären Formen auf irgend welchen rationalen (spec. Norm-) Curven als solche nur Mittel zum Hauptzweck ist, das Auftreten der Apolarität überall nachzuweisen und vor Allem den engen Zusammenhang der binären Apolarität mit der ternären, quaternären etc. zu ergründen, wozu es erst einer Reihe von Vorbereitungen bedarf, die ich, um sie dann ein für allemal zum Gebrauche fertig zu haben, nach Möglichkeit in ein systematisches Gewand gekleidet habe.

30. Die Behandlung dieser Normcurve des Raumes ist in ihrem ersten Theile der des Normkegelschnitts der Ebene ganz ähnlich; erst weiterhin stellen sich Besonderheiten ein, die von der gewachsenen Zahl der Raumelemente (Punkt, Ebene, Gerade) herrühren. Unter der Normcurve dritter Ordnung (N_3) verstehen wir, den Raum auf ein festes Tetraedercoordinatensystem bezogen gedacht, folgende:

$$(1)\ \rho x_3 = \lambda^3,\ \ \rho x_2 = 3\lambda^2,\ \ \rho x_1 = 3\lambda,\ \ \rho x_0 = 1.$$

Wiederum kann bekanntlich *) jede, beliebig gegebene, nicht zerfallende und in keiner Ebene liegende cubische Raumcurve durch geeignete Wahl des Coordinatentetraeders in dieser Form dargestellt werden. (Dasselbe besteht dann aus den (Schmiegungs-) **) Ebenen irgend zweier Punkte der Curve

---

*) Man wende nur auf die allgemein gegebene Curve

$$\rho x_i = a_{i3}\lambda^3 + a_{i2}\lambda^2 + a_{i1}\lambda + a_{i0} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

die lineare Punkttransformation an, deren Coefficienten die Unterdeterminanten des Systems der Coefficienten a sind und multiplicire dann noch ev. die neuen Coordinaten mit geeigneten Faktoren.

**) Es sei gleich hier hinsichtlich der Nomenklatur der cubischen Raumcurven Folgendes erwähnt:

„Die Schmiegungsebenen mögen einfach Ebenen der Curve (N_3): die „Linien zweier Schmiegungsebenen" einfach „Axen" der Curve (N_3): heissen, die also den Punkten, Sehnen der Curve (N_3) gegenüberstehen.

In gleicher Weise heissen die Tangentialebenen einer Fläche zweiter Classe Φ_2 einfach die Ebenen der Fläche, so dass man dann z. B. sagen kann:

„Eine Raumcurve dritter Classe (N_3) und eine Fläche zweiter Classe (Φ_2) haben sechs Ebenen gemein."

Enthalten die Ebenen einer Fläche zweiter Classe alle Ebenen einer cubischen Raumcurve (N_3) so sage ich: „die Fläche ist der Curve um(be)schrieben".

Die ganze Mannigfaltigkeit dieser Flächen zweiter Classe sei einfach: die Flächenschaarschaar (zweiter Classe) der Curve (N_3) gegenüber „dem Flächennetz (zweiter Ordnung) der Curve (N_3)".

Zur Gleichung (4) sei bemerkt, dass, wo es nicht nothwendig ist, die

nebst den beiden Tangentenebenen derselben, die resp. durch den andern Punkt hindurchgehen.)

Dann gehört jedem Werthe des Parameters λ ein bestimmter Punkt der Curve (oder auch seine Ebene, oder auch seine Tangente) zu und umgekehrt.

Daher wird im Folgenden einfach von Punkten (Ebenen, Tangenten) λ der Normcurve die Rede sein.

Das durch die Curve (1) gehende Flächennetz zweiter Ordnung ist, wie sofort zu sehen, dargestellt durch:

$$(2)\,(3x_1x_3 - x_2^2)\,\mu_2 + (9x_0x_3 - x_1x_2)\,\mu_1 + (3x_0x_2 - x_1^2)\,\mu_0 = 0,$$

wo die μ variabel sind.

Umgekehrt ist dann, wie man weiss, durch dieses Flächennetz zweiter Ordnung die Curve vollständig und eindeutig bestimmt. Wir kommen weiter unten auf dieses Netz von anderer Seite her zurück.

Der Schnitt mit einer beliebigen Ebene:

$$(3)\; u_x \equiv u_3x_3 + u_2x_2 + u_1x_1 = 0$$

liefert zur Bestimmung der Schnittpunkte die Gleichung:

$$(4)\; u_\lambda \equiv u_3\lambda^3 + 3\,u_2\lambda^2 + 3\,u_1\lambda + u_0 = 0.$$

Seien die Wurzeln derselben α, β, γ und

$$(5)\; \alpha+\beta+\gamma = \frac{s_1}{s_0},\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \frac{s_2}{s_0},\quad \alpha\beta\gamma = \frac{s_3}{s_0}$$

so folgt aus (4):

$$(6)\; \tau u_3 = s_0,\quad \tau u_2 = -\frac{s_1}{3},\quad \tau u_1 = \frac{s_2}{3},\quad \tau u_0 = -s_3.$$

Die Ebene wird (und nur dann) zur Ebene der Curve, wenn $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$. Daher ist die zu (1) dualistische Darstellung der Curve (in Ebenencoordinaten):

$$(7)\; \tau u_3 = 1,\quad \tau u_2 = -\lambda,\quad \tau u_1 = \lambda^2,\quad \tau u_0 = -\lambda^3,$$

---

gewöhnliche Bezeichnung einer binären Form a_λ^n, b_λ^n etc. durch a_λ, b_λ etc. ersetzt werde im Gegensatze zu den Formen a_s, b_s etc., die aus den ersten durch n malige Polarisation nach n Grössen entstehen. (cf. §. 5)

mithin ist die Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse, deren gemeinsame (Tangential-) Ebenen die Ebenen unserer Curve sind, oder wie wir kürzer sagen wollen: die Schaarschaar der der Curve umschriebenen Flächen zweiter Klasse" bestimmt durch:

$$(8)\ (u_1 u_3 - u_2^2)\, v_0 + (u_0 u_3 - u_1 u_2) v_1 + (u_0 u_2 - u_1^2) v_2 = 0$$

wo die v variabel sind.

Aus (8) geht wieder die Form (7) hervor, wie aus (2) die Form (1).

Combinirt man endlich die Gleichung eines beliebigen Punktes mit (7) und verfährt ganz wie mit (1), so erhält man als Coordinaten eines Punktes:

$$(9)\ \rho x_3 = s_3,\ \ \rho x_2 = s_2,\ \ \rho x_1 = s_1,\ \ \rho x_0 = s_0.$$

Mit Rücksicht auf die zum Satze A (§. 12) gehörige Anmerkung können wir das Bisherige in folgenden Satz zusammenfassen:

B) „Die räumliche Normcurve, als Curve dritter Ordnung aufgefasst (in diesem Sinne heisse sie N_3) ist durch die Gleichungen (1) resp. (2) dargestellt; dagegen als Curve dritter Klasse (und, sofern dies hervorgehoben werden soll, sei ihr Zeichen N_3) durch die Gleichungen (7) resp. (8).

Die Coordinaten eines beliebigen Raumpunktes sind durch (9); die einer beliebigen Raumebene *) durch (6) repräsentirt, wo die s_i die homogenen symmetrischen Funktionen der drei Parameter sind, die den drei vom Punkte an N_3 gehenden Ebenen resp. den drei auf N_3 von der Ebene ausgeschnittenen Punkten zugehören."

*) Diese erhält man also allgemein nach der Regel, dass man die Punktcoordinaten umkehrt, mit abwechselndem Vorzeichen versieht, und mit den (zur Dimensionenzahl des Raumes) gehörigen Binominalcoefficienten dividirt.

Die Einführung der cubischen Normcurve bringt es daher wieder mit sich, dass die Coordinaten eines Raumpunktes geradezu mit den homogenen symmetrischen Funktionen von drei Werthen (eines Parameters) identisch sind. (Und das Entsprechende gilt, wie man sich leicht überzeugt, für beliebig hohe Räume cf. No. 28.)

§. 14.

Geometrische Eigenschaft der auf die Normcurven bezogenen Coordinaten.

31. Ausser dem erwähnten formalen Vorzug, den die Normcurven mittelst der auf ihnen ausgebreiteten Parametervertheilung gewähren (und dessen Wichtigkeit erst allmählich hervortreten wird) gilt noch ein zweiter geometrischer. Es spricht sich nemlich in der neuen Bedeutung der Coordinaten eine hervorragend wichtige Eigenschaft von Punkt (Gerade) einer Ebene in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt in derselben, sowie von Punkt (Ebene) des Raumes in Bezug auf eine beliebige cubische Raumcurve aus, so dass diese Elementargebilde einen gewissen geometrischen Ort vorstellen.

In der That stellt ja eine Gleichung

$$(1)\; u_s = u_2 s_2 + u_1 s_1 + u_0 s_0 = 0$$

eine (gewöhnliche) *) Involution dar, als deren Elemente man hier die Punkte (Tangenten) λ eines Kegelschnitts (N_2) ansieht.

---

*) Ich verstehe, wie jetzt meistens geschieht, unter einer Involution n^{ter} Ordnung ein binäres Formenbüschel n^{ter} Ordnung „$f + k\varphi$“. Diese lässt sich dann (cf. Kap. I, § 3) stets ersetzen durch $(n-1)$, in $(n+1)$ Grössen s_i lineare Relationen, also eine Involution zweiter Ordnung (die ich die gewöhnliche Involution oder schlechtweg Involution nenne) durch eine Gleichung $u_s = 0$.

Für diese (Schnittpunkt-) Relationen kann man dann wieder die zugehörigen (Schnittpunkt-) „Formen“ setzen d. h. die zur Involution apolare oder conjugirte Formengruppe. (cf. § 24.)

Da nun nach Satz A) die s_i als homogene symmetrische Funktionen zweier Werthe α, β die Coordinaten des Punktes sind, von dem die Tangenten α, β an N_2 gehen, so liegt darin der bekannte Satz der Ebene (unter Punkt eines Linienpaares ihren gemeinsamen Punkt verstanden):

„Die Punkte der Tangentenpaare einer Involution auf einem Kegelschnitte durchlaufen eine Gerade (deren Schnittpunkte mit demselben die Doppelelemente der Involution darstellen) und umg. ist jede Gerade der Ort der Punkte der Tangentenpaare einer bestimmten Involution auf dem Kegelschnitte (und dualistisch für einen Punkt)."

Daraus folgt dann aus den geometrischen Eigenschaften der Involution, dass die Berührungspunkte eines jeden dieser Tangentenpaare harmonisch liegen zu den Schnittpunkten der Geraden mit N_2. Algebraisch heisst dies bekanntlich, dass die bilineare Invariante der beiden quadratischen Formen

$$(2)\begin{cases} u_2\,\lambda^2 + 2\,u_1\,\lambda + u_0 \\ s_0\,\lambda^2 - s_1\,\lambda \quad + s_2 \end{cases}$$

(abgesehen von einem Zahlenfaktor) mit u_s identisch ist.

Ganz analog stellt sich die Sache für die cubische Raumcurve (N_3) und wir können daher ohne Weiteres den Satz aussprechen (unter dem Punkte eines Tripels von Ebenen ihren gemeinsamen Punkt verstanden):

„Besteht zwischen den Ebenen einer cubischen Raumcurve eine trilineare symmetrische Verwandtschaft in der Art, dass zu irgend zwei Ebenen der Curve stets eine dritte und zwar so gehört, dass zu je zwei Ebenen dieses Tripels immer die dritte gehört, so durchlaufen die Punkte aller dieser Ebenentripel eine Ebene (die die Curve in

drei Punkten schneidet, deren Ebenen, dreifach gezählt, je ein Tripel der Verwandtschaft bilden).

Umgekehrt ist jede Ebene der Ort der Punkte der Ebenentripel einer solchen Verwandtschaft (und dualistisch für einen Punkt)."

Und auch die Folgerung ist hier eine ganz analoge.

Denn ist die Verwandtschaft dargestellt durch

$$(3)\ u_s \equiv u_3 s_3 + u_2 s_2 + u_1 s_1 + u_0 s_0 = 0$$

so sind die drei Ebenen der Curve, in denen je drei Ebenen eines Tripels zusammengefallen sind, repräsentirt durch:

$$(4)\ u_\lambda \equiv u_3 \lambda^3 + 3 u_2 \lambda^2 + 3 u_1 \lambda + u_0,$$

andrerseits aber irgend ein Tripel (s_i) der Verwandtschaft durch:

$$(5)\ s_\lambda \equiv s_0 \lambda^3 - s_1 \lambda^2 + s_2 \lambda - s_3.$$

Dann ist wieder die bilineare Invariante beider Formen (4) (5) (abgesehen von einem Zahlenfaktor) u_s. Daraus folgt, wenn ich zwei Ebenentripel der Curve, deren Argumente zwei zu einander apolaren cubischen binären Formen angehören, „zu einander apolar" nenne *):

„Jedes Tripel einer trilinearen symmetrischen Verwandtschaft (dessen Punkt also auf einer festen Ebene liegt) zwischen den Ebenen einer cubischen Raumcurve ist apolar zu dem ausgezeichneten Tripel **), dessen Elemente jedes, dreifach gezählt, ein Verwandtschaftstripel bilden."

*) In derselben Weise soll überhaupt immer das Wort apolar von den vorkommenden Argumentgruppen auf die zugehörigen Punkt- (Ebenen, Geraden etc.) Gruppen übertragen werden dürfen.

**) Daraus folgt wieder, wenn man die Normcurve von irgend einem Punkte

$$x_\lambda = x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3 = x_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

auf irgend eine Ebene projicirt, der alte Satz (Kap. I, §. 2) dass wenn $\rho x_i = a_i (\lambda - \lambda_i)^3$ (wo die a beliebige Faktoren sind) eine rationale ebene

Und da eine cubische binäre Form zu sich selber apolar ist, so folgt sofort der bekannte, schon mehrfaeh [21] auch von dieser Seite her betrachtete Satz:

Curve dritter Ordnung ist (mit dem Wendedreiseit als Coordinatendreiseit) so stellt

$$x_s \equiv x_0\, s_3 + \frac{x_1\, s_2}{3} + \frac{x_2\, s_1}{3} + x_1\, s_0 = 0$$

ihr Schnittpunkttheorem dar.

Nimmt man noch einen zweiten Punkt zu Hülfe

$$y_\lambda \equiv y_0\, \lambda^3 - y_1\, \lambda^2 + y_2\, \lambda - y_3 \equiv y_0\, (\lambda - \lambda_1')\, (\lambda - \lambda_2')\, (\lambda - \lambda_3')$$

und projicirt die Curve N_3 durch die Gerade xy auf eine Ebene, so repräsentirt die Gruppe

$$\begin{cases} x_0\, s_3 + \frac{x_1\, s_2}{3} + \frac{x_2\, s_1}{3} + x_3\, s_0 = 0 \equiv x_s \\ y_0\, s_3 + \frac{y_1\, s_2}{3} + \frac{y_2\, s_1}{3} + y_3\, s_0 = 0 \equiv y_s \end{cases}$$

wie man will, einen Punkt (Involution) in der Ebene der Curve

$$\rho x_i = a_i\, (\lambda - \lambda_i)^3$$

oder einen Punkt in der Ebene der Curve

$$\rho y_i = b_i\, (\lambda - \lambda_i')^3.$$

Die Involution, die das Strahlbüschel jedes Punktes aus der zugehörigen Curve ausschneidet, ist beidemal die zu

$$x_\lambda,\ y_\lambda$$

conjugirte Gruppe.

Und endlich gelangt man so mittelst dreier Punkte x, y, z zu einer Geraden, die durch die Gleichungen

$$x_s = 0,\ y_s = 0,\ z_s = 0$$

repräsentirt ist.

Dies Verfahren soll später ganz allgemein dargelegt werden, wodurch erreicht wird, dass jede R_n^d, mittelst des Projicirens (dualistisch Schneidens) sowie der umgekehrten Operationen auf die bezügliche Normcurve zurückgeführt wird.

Andrerseits erkennt man schon, dass dies Verfahren im Grunde identisch ist mit dem andern, statt der Dreiecks-, Tetraeder- etc. Coordinaten Vielecks-, Polyeder- etc. Coordinaten (die dann durch eine Anzahl linearer Relationen verbunden sein müssen) einzuführen.

„Der Schnittpunkt irgend dreier Ebenen der Curve liegt auf der Ebene ihrer Schmiegungspunkte (und Punkt und Ebene besitzen dann die gleichen Argumente)“.

Es hat offenbar nicht die geringste Schwierigkeit, diese Sätze für eine rationale Curve n^{ter} Ordnung im Raume von n Dimensionen auszusprechen: doch mag dies wegen der Complicirtheit der geometrischen Ausdrücke (bei algebraischer Evidenz) unterbleiben.

Der letzte Satz gilt selbstverständlich nur für Räume von ungerader Dimensionenzahl.

§. 15.

Die (gewöhnliche) Involution auf der cubischen Raumcurve.

32. Ehe wir zur Darstellung der Raumgeraden mittelst der Normcurve übergehen, sei erst noch der Darstellung der Punkte (Geraden) einer Ebene mittelst der Sehnen (Axen) einer cubischen Raumcurve gedacht, deren Gebrauch öfters von Nutzen ist. Nach §. 14 heisst dies Folgendes: [22]

„Eine Involution sei auf der cubischen Raumcurve (N_3) gegeben; welche Fläche bilden die Sehnen der Punktepaare der Involution (oder kürzer: die Sehnen der Involution)?“

Es ist sehr leicht zu beweisen, dass diese Sehnen eine Regelschaar zweiter Ordnung bilden und umgekehrt, dass jede Fläche des durch die Curve gehenden Flächennetzes zweiter Ordnung (§. 13, (2)) durch ihre Geraden (der einen Schaar) eine bestimmte Involution auf der Curve darstellt.

Wir verfahren zu dem Zweck so.

Machen wir (durch Coordinatentransformation) die gegebene cubische Raumcurve zur Normcurve N_3:

$$(1)\ \rho x_3 = \lambda^3,\ \ \rho x_2 = 3\,\lambda^2,\ \ \rho x_1 = 3\,\lambda,\ \ \rho x_0 = 1,$$

deren Flächennetz zweiter Ordnung also (§. 13) gegeben ist durch:

$$(2)\,(3x_1x_3-x_2^2)\mu_2+(9x_0x_3-x_1x_2)\mu_1+(3x_0x_2-x_1^2)\mu_0\equiv\mu_x^2=0$$

und sei die vorgelegte Involution

$$(3)\ m_2\,s_2+m_1\,s_1+m_0\,s_0\equiv m_s=0$$

so frage ich:

Unter welchen Bedingungen liegt eine Sehne der Involution (3) auf einer Fläche (2)?

Irgend eine Sehne der Involution, die dem Elementenpaare α, β angehöre, geht durch die beiden Punkte y, z mit den Coordinaten

$$(4)\ \lambda_1^3,\ 3\lambda_1^2,\ 3\lambda_1,\ 1;\quad \lambda_2^3,\ 3\lambda_2^2,\ 3\lambda_2,\ 1.$$

Nun sind die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung $a_x^2=0$ mit einer Geraden (y,z) nach der Joachimsthal'schen [23] Methode gegeben durch die quadratische Gleichung:

$$(5)\ \lambda^2 a_y^2+2\lambda a_{yz}+a_z^2=0.$$

Für eine der Flächen (2) und eine Sehne (y,z) verschwinden stets die beiden äusseren Glieder der letzten Gleichung; soll also die Gerade ganz auf der Fläche liegen, so bleibt die eine Bedingung

$$(6)\ \mu_{yz}=0 \text{ oder } \Sigma z_i\frac{d\mu_y^2}{dy_i}=0,$$

durch Einsetzen der Coordinaten (4) also (nach einfacher Rechnung)

$$(7)\ 9(\lambda_1-\lambda_2)^2\,(\mu_2\,s_2+\mu_1\,s_1+\mu_0\,s_0)=0.$$

Daraus geht hervor, dass, falls die verlangte Bedingung für jede Sehne der Involution (3) gelten soll, dass die Coefficienten μ der Fläche den bezüglichen Coefficienten m der Involution proportional sind, womit der Anfangs erwähnte Satz bewiesen ist.

Denn es ist klar, dass die Involutionssehnen nur die eine Regelschaar der zugehörigen Fläche zweiter Ordnung bilden,

da niemals zwei der Sehnen der Involution sich treffen können. Die Geraden der andern Regelschaar interessiren im Folgenden nicht weiter. Wir drücken der Kürze wegen den erhaltenen Satz so aus:

„Die Sehnen einer auf einer cubischen Raumcurve (N_3) dargestellten (Punkt-) Involution $\mu_s = 0$ bilden die eine Regelschaar der Fläche $\mu_x^2 = 0$ (2)" und umg. „Die Sehnen der Curve, die ganz auf einer Fläche $\mu_x^2 = 0$ liegen, sind die Sehnen der Involution $\mu_s = 0$."

Genau ebenso beweist man den dualistischen Satz:

„Die Axen einer auf der cubischen Normcurve (N_3) dargestellten (Ebenen-) Involution

$$(8)\ \nu_0\,\sigma_0 - \nu_1\,\sigma_1 + \nu_2\,\sigma_2 = 0$$

bilden die eine Regelschaar der der Curve umschriebenen Flächen zweiter Classe (§. 13):

$$(9)\ \nu_0(u_1 u_3 - u_2^2) + \nu_1(u_0 u_3 - u_1 u_2) + \nu_2(u_0 u_2 - u_1^2) \equiv u_\nu^2 = 0."$$

33. Während so, gestützt auf den Involutionsbegriff, zwischen den Punkten (Geraden) einer Ebene und den Sehnen (Axen) einer cubischen Raumcurve eine ein-eindeutige lineare Verwandtschaft hergestellt ist, wobei einer Geraden der Ebene eine der durch die Curve gehenden Flächen zweiter Ordnung entspricht und umg., wird man auf geometrischem Wege sofort zu einer zweiten eindeutigen Verwandtschaft (aber von zweitem Grade), wiederum zwischen den Punkten der Ebene und den Sehnen der Curve geführt, die mit der ersten eng zusammenhängt.

Wir werden auf diese zweite Verwandtschaft noch einmal später von anderer Seite her (bei näherem Studium des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung) zurückkommen und es genüge daher, hier vorläufig nur einige Hauptpunkte anzugeben.

Denken wir uns die Ebene irgendwie im Raume gegeben (doch so, dass sie weder Schmiegungs- noch Tangentenebene der cubischen Raumcurve ist), so trifft im allgemeinen jede Sehne der Curve die Ebene in einem Punkte und umgekehrt geht bekanntlich von jedem Punkte der Ebene nur eine Sehne an die Curve. Eine Ausnahme tritt nur ein für die drei Schnittpunkte der Curve mit der Ebene A_1, A_2, A_3. Jedem derselben entspricht die ganze Schaar von Sehnen, die alle auf einem Kegel (zweiter Ordnung) liegen, der die Raumcurve projicirt. Andrerseits entspricht jeder der drei Verbindungssehnen der drei Punkte ein jeder Punkt auf ihr.

Betrachten wir ferner irgend eine Sehne der Curve, sie heisse s; ihr Treffpunkt mit unserer Ebene sei S.

Dann befindet sich unter den Flächen des Netzes $\mu_x^2 = 0$ (2) ein Büschel von Flächen, die alle diese Sehne s ganz enthalten, mithin ist der Punkt S der vierte Grundpunkt eines Kegelschnittbüschels, dessen drei weitere Grundpunkte in A_1, A_2, A_3 liegen.

Nun entsprechen die Sehnen der Curve einmal nach der ersten (linearen) Verwandtschaft den Punkten der Ebene (und dann die Flächen des Netzes $\mu_x^2 = 0$ den Geraden der Ebene): andererseits eindeutig nach der zweiten Verwandtschaft gleichfalls den Punkten der Ebene.

Daher ist zwischen den Punkten der Ebene ein Entsprechen hergestellt, das genau mit der zweiten Verwandtschaft äquivalent ist, so dass es genügt, diese Verwandtschaft in der Ebene zu studiren.

Diese ist aber offenbar eine quadratische, ein-eindeutige, involutorische mit dem Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$, in der jeder Geraden ein Kegelschnitt durch die Ecken dieses Dreiecks, also einem Punkte (als Centrum eines Strahlbüschels) der vierte Basispunkt eines bestimmten Kegelschnittbüschels A_1, A_2, A_3 entspricht.

Wir werden weiter unten (worauf schon hingewiesen ist) leichter zeigen, dass diese quadratische Transformation in unserer Ebene sich dadurch näher bestimmt, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen der Curve (in A_1, A_2, A_3) (der ja in unserer Ebene liegt) einer der vier (fest bleibenden) Einheitspunkte der quadratischen Transformation ist.

Dann giebt es immer einen bestimmten Kegelschnitt unserer Ebene (der dann als Normkegelschnitt zu nehmen ist), der dem Dreieck $A_1\,A_2\,A_3$ einbeschrieben ist und für den der eben bezeichnete Punkt derjenige ist, in dem sich bekanntlich die drei Verbindungslinien der Punkte A mit den Berührungspunkten der resp. gegenüberliegenden Seiten treffen.

Dieser Kegelschnitt ist vermöge unserer quadratischen Transformation das Bild der Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen in A_1, A_2, A_3, die durch den Schnitt unserer Ebene mit der Tangentenregelfläche der cubischen Raumcurve erzeugt wird.

§. 16.
Die Covarianten einer binären cubischen Form f.

34. Der analytische Ausdruck der eben erörterten quadratischen Transformation ergiebt sich aus Früherem unmittelbar, andrerseits führt er uns zur Bedeutung der quadratischen (Hesse'schen) Covariante H der Form f:

$$(1)\; H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}.$$

Denn das durch die Normcurve gehende Flächennetz zweiter Ordnung war (cf. §. 15) dargestellt durch

$$(2)\; \mu_2\,(3x_1\,x_3 - x_2^2) + \mu_1\,(9\,x_0\,x_3 - x_1\,x_2) + \mu_0\,(3\,x_0\,x_2 - x_1^2) = 0.$$

Legen wir also eine beliebige Ebene

$$(3)\; u_x = 0$$

zu Grunde und nehmen drei ganz beliebige Linien in derselben

$$(5)\; y_2 = 0,\; y_1 = 0,\; y_0 = 0$$

zu Geraden eines Coordinatendreiecks, so ist die fragliche

Transformation in allgemeinster Weise gegeben durch

(6) $\tau y_2 = 3x_1 x_3 - x_2^2,\ \tau y_1 = 9x_0 x_3 - x_1 x_2,\ \tau y_0 = 3x_0 x_2 - x_1^2$

wo zwischen den x die Relation (3) besteht.

Andrerseits aber hat bekanntlich die Form f die Eigenschaft, auf eine Weise als lineare Combination von zwei Cuben linearer Ausdrücke $\lambda - \alpha$, $\lambda - \beta$ darstellbar zu sein, deren Wurzeln diejenigen der Covariante H sind.

Dies heisst aber offenbar (cf. §. 17 Anhang) (cf. Sturm pg. 124):

„Die Hesse'sche Covariante der Form (des Punktes) f stellt vermöge ihrer Wurzeln das Argumentenpaar der einen vom Punkte an die Normcurve N_3 gehenden Sehne dar."

Diese Covariante lautet entwickelt:

(7) $H = \lambda^2 (3x_0 x_2 - x_1^2) - \lambda (9x_0 x_3 - x_1 x_2) + (3x_1 x_3 - x_2^2)$.

Daraus folgt aber, nach dem letzten Satze und der Construktion voriger Nummer der mit dem eben noch angegebenen Ausdruck der quadratischen Transformation inhaltlich übereinstimmende Satz:

„Vermöge irgend einer beliebig, aber festgegebenen linearen Relation zwischen den Coefficienten von f, $u_x = 0$ kann man immer drei aus ihnen linear zusammengesetzte Ausdrücke den Coefficienten von H proportional setzen; dann ist dies der Ausdruck für die (allgemeinste) quadratische Transformation in der Ebene $u_x = 0$."

35. Eine ähnliche, aber räumliche eindeutige Transformation knüpft sich an die Covariante Q von f:

$$(8)\ Q = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}.$$

Vermöge der bekannten Eigenschaften von Q in Bezug auf f und H hat man sofort zunächst (cf. Sturm pg. 124):

„Construirt man auf der einen durch einen Punkt (f) gehenden Sehne (von N_3) den zum Punktepaare der Curve und zum Ausgangspunkte harmonischen Punkt, so ist seine Darstellungsform Q."

Dadurch ist zwischen den Punkten des Raumes eine eindeutige involutorische Beziehung gegeben mit der Fundamentalcurve N_3, denn nur für die Punkte dieser Curve wird die Beziehung unbestimmt.

Dies ist aber bekanntlich derjenige spezielle Fall derjenigen eindeutigen Raumtransformation dritten Grades, die durch die in Bezug auf ein Flächennetz zweiter Ordnung conjugirten Punktepaare bestimmt ist, wenn die Flächen des Netzes durch eine cubische Raumcurve gehen, d. h. wenn die Fundamentalcurve der Transformation (die im Allgemeinen die Kegelspitzencurve des Netzes ist) in die doppelt zählende cubische Curve ausartet *). Man hat daher:

*) Ein analoger Satz gilt für alle Normcurven ungerader Ordnung. So erhält man, von der nächst höheren Art, den Normcurven fünfter Ordnung (im Raume von fünf Dimensionen) ausgehend:

„Unterwirft man die Coefficienten *zweier* binären Formen fünfter Ordnung

$$a_\lambda = a_0\lambda^5 + 5a_1\lambda^4 + 10a_2\lambda^3 + 10a_3\lambda^2 + 5a_4\lambda + a_5$$

$$b_\lambda = b_0\lambda^5 + 5b_1\lambda^4 + 10b_2\lambda^3 + 10b_3\lambda^2 + 5b_4\lambda + b_5$$

zwei beliebig aber fest gewählten linearen Relationen (mit den Coefficienten x, resp. y)

$$u_x = 0 \quad u_y = 0$$

so reduciren sie sich auf zwei cubische Formen F, Φ, deren Gerade (Functionaldeterminante) ein- eindeutig in quadratischer Verwandtschaft der Combinant-Covariante vierten Grades J der Formen a_λ, b_λ, zugeordnet ist. Diese Form ist die Invariante J (cf. Salmon, Höhere Algebra Art. XIX) der Form $a_\lambda + kb_\lambda$ und ihre Wurzeln sind durch die Gleichungen bestimmt:

„**Die durch die in Bezug auf das Flächennetz zweiter Ordnung der Normcurve N_3 conjugirten Punktepaare bestimmte ein-eindeutige involutorische Verwandtschaft dritten Grades ist *unmittelbar* dargestellt durch die respective Proportionalität der Coefficienten von**

$$f = x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3$$

mit denen von $Q = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}$“

In der That überzeugt man sich auch durch leichte Rechnung bei Benützung der Gleichung (2) von der Richtigkeit dieses Satzes.

Endlich ist ebenfalls bekannt, dass der durch sieben Raumpunkte bestimmte achte, der mit ihnen die Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung bildet, kein anderer ist als der irgend einem der sieben Punkte in obiger Transformation entsprechende, wenn man die Fundamentalcurve dritter Ordnung durch die sechs andern bestimmt sein lässt. Wir können daher auch so sagen:

„**Die Punkte f und Q bilden mit jedem beliebigen Punktsextupel der Normcurve die Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung.**“

$$\begin{cases} a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_2 s_1 + a_4 s_0 = 0 \\ a_1 s_4 + a_2 s_3 + a_3 s_2 + a_4 s_1 + a_5 s_0 = 0 \\ b_0 s_4 + b_1 s_3 + b_2 s_2 + b_3 s_1 + b_4 s_0 = 0 \\ b_1 s_4 + b_2 s_3 + b_3 s_2 + b_4 s_1 + b_5 s_0 = 0.\text{“} \end{cases}$$

Diese letztere Covariante J stellt dann, wie leicht mit Hülfe des Satzes Kap. I, §. 2 zu sehen, die einzige Quadrisekante einer rationalen Curve fünfter Ordnung (im gewöhnlichen Raum) dar, deren „Schnittpunktformen“ a_λ, b_λ sind, d. h. die zu a_λ, b_λ apolare Gruppe enthält eine Involution fünfter Ordnung mit dem festen Faktor J.

Und ähnlich für die höheren Fälle. Ich behalte mir vor, anderswo auf diese eindeutigen Verwandtschaften näher einzugehen.

Wie sich die sonstigen, von den Formen f, H, Q geltenden Sätze im Sinne unserer Theorie aussprechen, ist wesentlich so einfach, dass es übergangen werden kann.

Zur Vervollständigung mag noch der Satz bemerkt werden, der wie die obigen über H und Q nahezu evident ist:

„Die Invariante (Discriminante) der Form f (zugleich Discriminante von H) stellt unmittelbar, $= 0$ gesetzt, die Tangentenregelfläche der Normcurve in Punktcoordinaten dar.“

In ähnlicher Weise gelingt die Interpretation der simultanen In- und Covarianten von mehreren quadratischen und cubischen Formen ohne wesentliche Schwierigkeiten: sie mag übergangen werden, um nicht unsern Hauptzweck, die Verknüpfung der Apolarität mit den Normcurven, zu sehr aus dem Auge zu verlieren.

Dagegen soll der schon in diesem Paragraphen evident hervortretende Zusammenhang der linearen Transformationen auf der Normcurve mit den Collineationen des bezüglichen Raumes später im Allgemeinen besprochen werden.

Dasselbe gilt von den Modificationen, die die fundamentalen Eigenschaften der Normcurven bei irgend welchen Projektionen der Normcurven in niedrigere Räume erleiden, und die sich speziell für die cubischen Normcurven an die Erörterungen des §. 14 anschliessen würden. Auch diese sollen an geeigneter Stelle im Zusammenhange besprochen werden.

Bisher war die Theorie der cubischen Normcurve der des Normkegelschnitts wesentlich ähnlich: durch die nun folgende Berücksichtigung des neuen im Raume sich selbst dualistischen Elements, der Geraden, entfernt sie sich eine Zeit lang scheinbar von der Theorie der Ebene immer mehr, bis sich später, bei Gelegenheit der Apolaritätstheorie für die Kegelschnitte beide Theorien wieder vereinigen werden. Auf diese Weise (die bei Betrachtung der höheren Normcurven immer wieder-

kehrt) wird das Princip, den Apolaritätsbegriff in den Vordergrund zu stellen, allmählich immer mehr seine Rechtfertigung finden.

§. 17.

Die Darstellung der Geraden mittelst der Normcurve.

36. Auch in diesem Gebiet können wir uns auf das für das Folgende Nothwendigste beschränken und im Übrigen auf die Sturm'sche Arbeit verweisen, deren Resultate theilweise hier recapitulirt werden, von deren Gang wir jedoch im Folgenden öfters wesentlich abweichen. Auch eine Anzahl neuer Resultate wird sich dabei ergeben.

Eine Gerade ist durch zwei Punkte x, y bestimmt:

$$(1)\begin{cases} f = x_0\lambda^3 - x_1\lambda^2 + x_2\lambda - x_3 \\ \varphi = y_0\lambda^3 - y_1\lambda^2 + y_2\lambda - y_3. \end{cases}$$

Da ein beliebiger Punkt der Geraden (und sonst kein Punkt des Raumes) durch $x + ky$ gegeben ist, so folgt sofort der zum Satze der Ebene (§. 14) in zweiter Linie analoge Satz (cf. die erste Analogie §. 14):

„Die (Schnitt-) Punkte der Ebenentripel einer auf N_3 (d. h. einer beliebigen Raumcurve dritter Klasse) gegebenen Involution dritter Ordnung durchlaufen eine Gerade und umgekehrt ist jede Gerade die Reihe der Punkte der Ebenentripel einer bestimmten Involution dritter Ordnung auf N_3.

Dualistisch drehen sich die Ebenen der Punktetripel einer auf N_3 gegebenen Involution dritter Ordnung um eine Gerade und umgekehrt ist jede Gerade die Axe der Ebenen der Punktetripel einer bestimmten Involution auf N_3."

Daher ist es die nächste Aufgabe, für die durch (1) ge-

gebene Gerade die zugehörige Involution ihres Ebenenbüschels zu finden.

Es seien irgend zwei der Ebenen dieses Büschels

$$(2)\quad u_s = 0,\ v_s = 0$$

so muss die gesuchte Involution die Form $F + k' \Phi$ haben, wo

$$(3)\quad \begin{cases} F = u_3 \lambda^3 + 3u_2 \lambda^2 + 3u_1\lambda + u_0 \\ \Phi = v_3 \lambda^3 + 3v_2 \lambda^2 + 3v_1\lambda + v_0. \end{cases}$$

Da aber bekanntlich die Axencoordinaten der Geraden $\begin{vmatrix} u_l & u_m \\ v_l & v_m \end{vmatrix} = (uv)_{lm} = q_{lm}$ $(l, m = 0, 1, 2, 3)$ den Strahlencoordinaten $\begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} = (xy)_{ik} = p_{ik}$ proportional sind (und zwar so, dass die Indices i, k, l, m immer die vier Zahlen 0, 1, 2, 3 in einer cyclischen Aufeinanderfolge sind), so haben wir den Satz:

„Die beiden Involutionen (1) (3) bilden immer dann die beiden Involutionen einer und derselben (Geraden auf N_3 resp. N_3 bezogen), wenn die Bedingungen

$$(4)\quad \rho\,(x\,y)_{ik} = (uv)_{lm}$$

erfüllt sind und umgekehrt.“

In der That bilden ja nach dem ersten Capitel (§. 3) unter den Bedingungen (4) die Gleichungen (2) den **Ersatz der** Involutionsgleichungen (1): diese Gleichungen (2) gehen **aber** wieder durch Combination mit den Gleichungen der Normcurve N_3 in (3) über.

Beide Involutionen (1) (3) haben nach Capitel I §. 11 dieselben Combinanten und diese stellen offenbar, gleich Null gesetzt, die (im quaternären) Sinne invarianten Eigenschaften der zugehörigen Geraden in Bezug auf die Normcurve dar. Dies soll später noch genauer explicirt werden.

37. Daran knüpfe sich die Wiederaufnahme einer schon einmal behandelten Frage (cf. Cap. I §. 7 Nr. 17), nemlich der nach der Darstellung einer cubischen Raumcurve in Liniencoordinaten. Damals handelte es sich darum, zu zeigen, dass es genüge, diese Frage für die Normcurve zu lösen und dass es dann leicht sei, die bez. Formeln für eine beliebige andere cubische Raumcurve anzugeben.

Hier wollen wir daher die Frage an der Hand der Normcurve weiterführen mittelst gleichzeitigen Gebrauchs zu einander dualistischer Formeln.

Sollte, um dies aus Kap. I l. c. kurz zu wiederholen, die Gerade (2) die Normcurve **treffen**, so musste die Resultante von F und Φ verschwinden. Diese war aber in der Bézout'schen Gestalt:

$$(5)\quad R = 27 \begin{vmatrix} q_{32}, & q_{31}, & \frac{q_{30}}{3} \\ q_{31}, & \frac{q_{30}}{3} + 3\, q_{21}, & q_{20} \\ \frac{q_{30}}{3}, & q_{20}, & q_{10} \end{vmatrix}$$

oder wegen der Relationen (4) (wo wir noch der Bequemlichkeit wegen den Faktor $\rho = 1$ setzen):

$$(6)\quad R = -27 \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} \\ p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} + 3\, p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}}{3}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = -27\, R'.$$

Bei variabeln p_{ik} stellt daher $R = 0$ die Gleichung der Normcurve d. h. ihres Treffgeradencomplexes in Axen- resp. Strahlencoordinaten dar.

Soll andrerseits eine Gerade (1) in einer Ebene der Curve liegen, so muss die Resultante von f, φ verschwinden. Diese ist aber:

$$(7)\quad P = - \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03} + p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix}.$$

$P = 0$ stellt demnach bei variabeln p_{ik} den Complex der Geraden dar, die in den Ebenen der Curve liegen.

Gehen wir jetzt auf die absoluten Werthe von R resp. P näher ein, so bemerken wir zunächst, dass der Ausdruck R in P (abgesehen vom Zahlenfaktor 27) übergeht (und umg.) durch Vertauschung der beiden Grössen p_{03} und $\frac{p_{12}}{3}$, so dass sie unter der Bedingung

$$(8)\quad 3\,p_{03} - p_{12} = 0$$

coincidiren.

Andrerseits ist aber die bilineare Invariante der Formen f, φ (1) (ebenso wie die der Formen F, Φ (3), abgesehen vom Zahlenfaktor 3)

$$(9)\quad (f\varphi)^3 = -\left\{p_{03} - \frac{p_{12}}{3}\right\} \text{ (cf. Sturm pg. 123)}$$

so dass wir zunächst den Satz gewinnen:

„Die den Complexen $R = 0$, $P = 0$ gemeinsame Congruenz ist dieselbe wie die den Complexen $R = 0$ (resp. $P = 0$), $(f\varphi)^3 = 0$ gemeinsame und besteht aus den Strahlbüscheln der Punkte der Curve in ihren bezüglichen Ebenen."

Der lineare Complex $(f\varphi)^3 = 0$ aber ist, wie schon damals (Nr. 17) bewiesen, kein anderer als der zur Normcurve gehörige Nullcomplex, was übrigens auch aus dem Apolaritätssatze des §. 14 sofort hervorgeht.

Denn dieser sagt, in anderer Form ausgesprochen, aus, dass wenn zwei cubische binäre Formen apolar sind, die durch sie dargestellten Punkte von der Art sind, dass die Nullcomplex-Ebene eines jeden auch durch den andern Punkt geht, so dass ihre Verbindungsgerade im Nullcomplexe sich

selber conjugirt ist, d. h. sie ist eine Gerade des Complexes. (Cf. Sturm pg. 123.)

38. Zu den beiden Ausdrücken R, P gelangen wir aber noch auf eine andere[24] Weise und gerade diese erlaubt es, eine Reihe wichtiger Beziehungen zu ermitteln.

Eine Gerade (1) wird von vier Tangenten der Curve getroffen, von denen nur dann zwei coincidiren, wenn die Gerade entweder die Curve trifft oder in einer Ebene der Curve liegt. Dies ist geometrisch evident. Mithin muss die Discriminante der biquadratischen binären Form, deren Wurzeln die Argumente jener vier Tangenten sind, die beiden Ausdrücke R, P als Faktoren enthalten. Da aber, wie gleich gezeigt wird, diese biquadratische Form die (Jacobi'sche) Funktionaldeterminante der Formen f, φ und daher linear in den p_{ik} ist, so ist ihre Discriminante vom sechsten Grade in denselben und muss folglich (abgesehen von einem Zahlenfaktor) aus dem Produkte R, P selbst bestehen.

Den Zahlenfaktor werden wir durch passende Specialisirung ermitteln, die zugleich einen zweiten rechnerischen Beweis des Satzes erlaubt. Dass die gesuchte biquadratische Form (die Darstellungsform der vier Tangenten, die eine gegebene Gerade (1) resp. (3) treffen) durch die Funktionaldeterminante der Formen f, φ (oder auch F, Φ) gegeben ist, ergiebt sich sofort so:

Soll von einem Punkte der Geraden (1)

$$f + k\varphi$$

eine Tangente an die Curve gehen, so fallen von den drei an die Curve gehenden Ebenen des Punktes zwei zusammen (und umg.), d. h. es verschwinden die beiden Differentialquotienten der Form $f + k\varphi$ (nach den beiden homogenen Variabeln genommen):

$$(10) \quad \begin{cases} f_1 + k\varphi_1 = 0 \\ f_2 + k\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

d. h. die gesuchte Form ist

$$(11)\ J = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = p_{01}\lambda^4 - 2p_{02}\lambda^3 + \lambda^2(3p_{03} + p_{12}) - 2p_{13}\lambda + p_{23}$$

(cf. Sturm pg. 134).

Mittelst ihrer beiden Invarianten i, j drückt sich bekanntlich die Discriminante einer biquadratischen binären Form so aus

$$(12)\ D = i^3 - 6j^2.$$

In unserem Falle wird i (mit Benützung der Identität zwischen den p_{ik}):

$$(13)\ i = 2\left\{p_{01}\,p_{23} - p_{02}\,p_{13} + \frac{(3p_{03} + p_{12})^2}{12}\right\} = \frac{3}{2}\left\{p_{03} - \frac{p_{21}}{3}\right\}^2$$

und

$$(14)\ j = 6\begin{vmatrix} p_{01}, & \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{03}}{2} + \frac{p_{12}}{6} \\ \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{03}}{2} + \frac{p_{12}}{6}, & \frac{p_{31}}{2} \\ \frac{p_{03}}{2} + \frac{p_{12}}{6}, & \frac{p_{31}}{2}, & p_{23} \end{vmatrix}.$$

Wir machen jetzt die immer erlaubte *) Annahme, dass in (1)

$$(15)\ x_1 = y_1 = 0,$$

dann wird

$$(16)\ i = \frac{3}{2}\,p_{03}^2,\quad j = -\frac{3}{4}\,(p_{03}^3 + 2p_{20}^2\,p_{23})$$

---

*) Dies sieht man am einfachsten geometrisch ein. Denn wegen der Lage des Coordinatentetraeders zur Curve N_3 (cf. §. 13 pg. 47) sagt die Bedingung (15) nur aus, dass unsere Gerade (1) in einer Ebene durch die Tangente „∞" liege. Legt man daher einer der vier Tangenten, die unsere Gerade treffen, das Argument ∞, sowie dem Restpunkt, den die zugehörige, zugleich durch die Gerade gehende Tangentenebene aus N_3 ausschneidet, das Argument 0 bei, so ist die Bedingung (17) erfüllt. Dann verschwinden in der biquadratischen Form J (11) die Coefficienten von λ^4 und λ. Dies Verfahren wird später mit Vortheil noch weiter ausgedehnt.

und es ergiebt sich einmal

$$(17)\ D = i^3 - 6j^2 = -\frac{1}{2}\, p_{20}^2 p_{23} \{p_{03}^3 + p_{20}^2 p_{23}\}$$

andrerseits

$$(18)\ \sqrt{i^3} \pm j\sqrt{6} = \frac{p_{03}^3 \mp (p_{03}^3 + 2\, p_{20}^2 p_{23})}{\sqrt{2^3}}$$ (unter den Wurzeln die absoluten Werthe verstanden), woraus wieder (17) hervorgeht.

Endlich wird vermöge unserer Annahme

$$(19)\ R' = -\begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} \\ p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} + 3\, p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}}{3}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = p_{23}\, p_{02}^2.$$

$$P = -\begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03} + p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = p_{03}^3 + p_{20}^2 p_{23}$$

und demnach endlich

$$(20)\qquad -2D = R'P. = \frac{R.P}{27}\ \text{(cf. (6))}.$$

Drücken wir noch die in R,P vorkommenden p_{ik} durch die Wurzeln der biquadratischen Form aus, so haben die den Grundstock des Weiteren bildenden Formeln:

$$(21)\ s_0 = p_{01},\ s_1 = 2p_{02},\ s_2 = 3p_{03} + p_{12},\ s_3 = 2p_{13},\ s_4 = p_{23},$$

und mit Benützung der Identität zwischen den p_{ik}:

$$(22)\ 3p_{03} = \frac{s_2}{2} \pm \frac{3i}{\sqrt{6}},\ p_{12} = \frac{s_2}{2} \mp \frac{3i}{\sqrt{6}}$$ (cf. Sturm pg. 134).

Diese Ergebnisse fassen wir so zusammen (vgl. die Bemerkungen von Sturm pg. 135)

„Die Zerlegung der Discriminante einer allgemeinen biquadratischen binären Form

$$(12)\ D = i^3 - 6j^2$$

in die beiden Faktoren

(18) $(\sqrt{i^3} + j\sqrt{6})(\sqrt{i^3} - j\sqrt{6})$.

lässt sich, abgesehen von der Quadratwurzel aus $6i$ stets auf rationale Weise ausführen und zwar gehen diese Faktoren mittelst der durch die Gleichungen

(21) (22)

bestimmten p_{ik} in die Formen

(19) R, P

über.

Diese letzteren sind die Resultanten von zwei Paaren cubischer Formen, deren Gruppen (Involutionen) zu einander conjugirt sind.

Umgekehrt sind die Resultanten von irgend zwei Paaren cubischer Formen, deren Gruppen zu einander conjugirt sind, die Faktoren der Discriminanten ihrer (gemeinsamen) Funktionaldeterminante."

39. Da die Invariante i (13) das Quadrat von $(f\varphi)^3$ ist, so haben wir auch den Satz (cf. Sturm pg. 137):

„Der (lineare) Nullcomplex der Normcurve ist auch durch

(23) $i = 0$

dargestellt d. h. die vier Tangenten der Curve, die irgend eine Gerade des Complexes treffen, bilden ein aequianharmonisches Quadrupel, und umgekehrt."

40. Ehe wir die Formeln (21) (22) weiter verwenden, möge erst noch die Zerlegung der Discriminante einer biquadratischen binären Form nach einer andern Seite hin ergänzt werden. Sie beruht wesentlich darauf, dass wir die biquadratische Form als Hesse'sche Covariante einer andern biquadratischen Form ansehen.

In der That giebt es bekanntlich nach Clebsch[25)] im Allgemeinen stets zwei Formen der Involution (3) $F + k'\Phi$, die

die Differentialquotienten einer biquadratischen Form B sind und zwar, wenn (homogen geschrieben)

$$(3)\quad \begin{cases} F \equiv u_3\,\lambda^3 + 3u_2\,\lambda^2\mu + 3u_1\,\lambda\mu^2 + u_0\,\mu^3 \\ \Phi \equiv v_3\,\lambda^3 + 3v_2\,\lambda^2\mu + 3v_2\,\lambda\mu^2 + v_0\,\mu^3 \end{cases}$$

und die gesuchte Form

$$(24)\quad B_\lambda^4 \equiv b_0\,\lambda^4 + 4b_1\,\lambda^3\,\mu + 6b_2\,\lambda^2\,\mu^2 + 4b_3\,\lambda\mu^3 + b_4\,\mu^4$$

so wird (wie auch durch ganz einfache elementare Rechnung folgt)

$$(25)\quad B = F\,(\alpha\lambda + \mu\alpha_1) + \Phi\,(\beta\lambda + \mu\beta_1)$$

$$\text{wo}\ \rho\alpha = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_0 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \rho\alpha_1 = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}\ \rho\beta = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \rho\beta_1 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Dabei sind (26) $\alpha\lambda + \mu\alpha_1$; $\beta\lambda + \mu\beta_1$ zwei lineare Covarianten von F, Φ *).

Dann folgt sofort, dass die Hesse'sche Form von B

$$(27)\quad H = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} J$$

wird.

In derselben Weise giebt es zwei Formen der Involution (1) $f + k\varphi$, die die Differentialquotienten einer andern biquadratischen Form A sind. (Diese findet man §. 22.)

Dann wird, wenn analog

---

*) Diese stellen, $= 0$ gesetzt, wie man mit Hülfe des Satzes des §. 14 und aus ihrer Bildung leicht folgt, folgendes Punktepaar der Curve dar. Man lege (dualistisch) durch die Punkte f, φ die beiden Sehnen an die Curve, sowie durch die Gerade (f, φ) die beiden Ebenen, die diese Sehnen resp. enthalten. Diese Ebenen schneiden ausserdem noch das gesuchte Punktepaar aus. Umgekehrt gehört, wie auch aus dem Clebsch'schen Satze folgt, zu einem beliebigen Punktepaar der Curve, wenn ausserdem die Gerade (f, φ) gegeben ist, ein bestimmtes Punktepaar f, φ auf der letzteren, das die Punkte des ersten Paares zu den angegebenen Covarianten hat.

$$(28)\ A = f(\alpha'\lambda + \mu\alpha'_1) + \varphi(\beta'\lambda + \mu\beta'_1)$$

die Hesse'sche Form von A

$$(29)\ H' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'_1 \\ \beta' & \beta'_1 \end{vmatrix} J$$

so dass wir den Satz gewonnen haben:

„Eine gegebene Form vierten Grades (11) J kann (wie bekannt) auf doppelte Weise als Hesse'sche Form von zwei anderen biquadratischen Formen A, B angesehen werden, und zwar mittelst der Gleichungen (21) (22) (24) bis (29). Zunächst erscheint die gegebene Form J als Functionaldeterminante von zwei cubischen Formenpaaren

$$f + k\varphi, \qquad F + k'\Phi$$

deren Gruppen einander conjugirt sind. In jeder dieser Gruppen giebt es zwei Formen, die die Differentialquotienten einer biquadratischen Form sind; diese beiden letzteren sind dann die Formen A, B."

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen:

„Die zur Involution dritter Ordnung der ersten Polaren einer biquadratischen binären Form conjugirte Involution enthält die beiden ersten Differentialquotienten einer andern biquadratischen Form, deren Hesse'sche Form identisch ist mit der Hesse'schen Form der gegebenen Form."

41. Man kann sich aber auch bei Untersuchung der Discriminante von J auf eine der Involutionen (1) (3) beschränken. Die beiden Faktoren der Discriminante sagten durch ihr Verschwinden aus, dass eine Gerade (J) die Curve N_3 trifft, resp. in einer Ebene von N_3 liegt.

Im ersten Falle aber verschwindet die Resultante der Formen F, Φ (3), im andern giebt es eine Form der Gruppe $F + k'\Phi$, die dritte Potenz eines linearen Ausdrucks ist. Das

Umgekehrte gilt von der Gruppe (1). In der That folgt dies ja auch aus dem einfachsten Satze [26] aus der Theorie der conjugirten binären Formen:

„Ist eine Form n^{ten} Grades zu einer n^{ten} Potenz (eines linearen Ausdrucks $(\lambda-\alpha)$ apolar, so ist α eine Wurzel der ersten Form und umgekehrt."

Wir können daher auch sagen:

„Die Faktoren der Discriminante von J sind für jede der Involutionen (1) $f + k\varphi$; (3) $F + k'\Phi$ einmal die Resultante, andrerseits die linke Seite der Bedingung, dass eine Form der Involution die dritte Potenz (eines linearen Ausdrucks) ist."

In dieser Form lassen sich die Sätze der Nummern 38 bis 41 auf Involutionen beliebiger Ordnung ausdehnen, was später bei Gelegenheit der Involutionen vierter Ordnung ausgeführt werden soll.

42. Die weitere Untersuchung knüpft an die Gleichungen (11) (21) (22) an. Zunächst liegt in ihnen der wichtige Satz:

„Die Form (11) ist die Darstellungsform einer beliebigen Geraden (und zugleich ihrer im Nullcomplex conjugirten) im Raume: ihre Coordinaten bestimmen sich aus den Wurzeln der Form nach (21) (22)."

Fallen alle Wurzeln der Form zusammen, so wird die dargestellte Gerade (und nur dann) zur Tangente der Curve. Eine solche ist also *) repräsentirt durch (mit Wiedereinführung des Proportionalitätsfaktors)

$$(30)\ \rho p_{01}=1,\ \rho p_{02}=2\lambda,\ \rho p_{03}=\lambda^2,\ \rho p_{12}=3\lambda^2,\ \rho p_{13}=2\lambda^3,\ \rho p_{23}=\lambda^4.$$

(Cf. Sturm pg. 134.)

*) Die Gleichungen (30) kann man natürlich auch direkt aus der Gleichung der Normcurve mit Hülfe des für alle rationalen Curven geltenden Clebsch'schen Verfahrens [27] erhalten, oder auch aus den Gleichungen 32), die gleichfalls sich direkt leicht ergeben.

Da zwei Gerade p_{ik}, q_{ik} sich bekanntlich unter der Bedingung treffen

$$(31)\ \Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0$$

so drückt die Gleichung

$$(11)\ J = 0$$

nichts anderes aus, als dass die Gerade p_{ik} eine Tangente λ der Curve trifft, mithin, da J für vier Werthe verschwindet, dass die Gerade vier Tangenten der Curve trifft, wie es sein muss.

Schliesslich gelangen wir auch von (21) (22) zur Gleichung einer Sehne (Axe) der Curve. Seien die Argumente irgend zweier Punkte der Curve α, β und die bez. homogenen symmetrischen Funktionen σ_0, σ_1, σ_2, so haben wir:

$$(32)\begin{cases} \text{Sehne)} & \rho p_{01} = \sigma_0^2,\ \rho p_{02} = \sigma_1\sigma_0,\ \rho p_{13} = \sigma_1\sigma_2,\ \rho p_{23} = \sigma_2^2 \\ \text{Axe)} & \rho p_{01} = \sigma_0^2,\ \rho p_{02} = \sigma_1\sigma_0,\ \rho p_{13} = \sigma_1\sigma_2,\ \rho p_{23} = \sigma_2^2 \\ \text{oder:} & \tau q_{23} = \sigma_0^2,\ \tau q_{31} = \sigma_1\sigma_0,\ \tau q_{20} = \sigma_1\sigma_2,\ \tau q_{01} = \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Sehne)} & \rho p_{12} = 3\sigma_2\sigma_0 \quad \rho p_{03} = \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3} \\ \text{Axe)} & \rho p_{12} = (\sigma_1 - \sigma_0\sigma_2),\ \rho p_{03} = \sigma_2\sigma_0 \\ \text{oder:} & \tau q_{03} = (\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2),\ \tau q_{12} = \sigma_2\sigma_0. \end{cases}$$

43. Hieran reiht sich unmittelbar die für das Folgende wichtige Untersuchung der Sehnen (Axen) der Normcurve, die einem allgemeinen linearen Complexe angehören. Diese Sehnen (nebst den Axen) liegen bekanntlich [28] auf einer Regelfläche vierter Ordnung und Klasse, die die Normcurve zur Doppelcurve besitzt. Da diese Fläche schon zur Genüge untersucht ist, so soll es sich hier nur darum handeln, die nöthigen Grundformeln aufzustellen.

Ein allgemeiner linearer Complex ist dargestellt durch:

$$(33)\ \Sigma\Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0 \qquad (i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$$

wo die p Liniencoordinaten, die q aber ganz beliebige Coeffi-

cienten sind. Diesem gehört irgend eine Sehne (32) unter der Bedingung an:

$$(34)\ \sigma_0^2 q_{23}+\sigma_0\sigma_1 q_{31}+\sigma_1\sigma_2 q_{20}+\sigma_2^2 q_{01}+3\sigma_0\sigma_2 q_{03}+\frac{\sigma_1^2-\sigma_0\sigma_2}{3}q_{12}=0$$

oder nach den Potenzen und Produkten von σ geordnet:

$$(35)\ \sigma_0^2 q_{23}+\sigma_0\sigma_1 q_{31}+\sigma_1\sigma_2 q_{20}+\sigma_2^2 q_{01}+\frac{\sigma_1^2}{3}q_{12}+\sigma_0\sigma_2(3q_{03}-\frac{q_{12}}{3})=0.$$

Während also (cf. §. 15) eine lineare Relation zwischen den σ die Geraden einer Regelschaar zweiter Ordnung liefert, so haben wir den brauchbaren Satz [29]:

„Eine allgemeine Relation zweiten Grades zwischen den symmetrischen Funktionen σ_i liefert alle Sehnen, die einem bestimmten linearen Complex angehören und umgekehrt" *).

Gerade also wie man damals die Gleichung der der Geraden

$$m_2\sigma_2+m_1\sigma_1+m_0\sigma_0=0$$

entsprechenden Fläche zweiter Ordnung durch die Substitutionen

$$(36)\ \rho\sigma_2=3x_1x_3-x_2^2,\ \rho\sigma_1=9x_0x_3-x_1x_2,\ \rho\sigma_0=3x_0x_2-x_1^2$$

erhielt, so geht hier durch dieselben Substitutionen die Gleichung (35) in die der Regelfläche über **), die der Ort aller

*) Vertauscht man (wie aus (32) hervorgeht) in (34) (35) $3\sigma_0\sigma_2$ mit $(\sigma_1^2-\sigma_0\sigma_2)$ oder, was damit aequivalent ist, $3q_{03}$ mit q_{12}, so resultirt die Gleichung für die (Argumentenpaare der) Axen der Curve, die dem Complex (33) angehören und daher nach dem Clebsch-Cayley'schen Satz mit den Sehnen (35) auf derselben Regelfläche liegen (cf. Salmon, Raumgeometrie pg. 438). Die Gleichung derselben in Ebenencoordinaten ergiebt sich ganz ebenso, wie die in Punktcoordinaten, mittelst der Entwicklungen des §. 15. Geht man, statt von den Hülfsgleichungen (32) direkt von der Darstellungsform (11) aus, so liefert die Bedingung des Complexes (33) das Produkt der beiden Gleichungen für die dem Complexe angehörigen Sehnen und Axen der Curve.

**) Man sieht dies noch deutlicher mit Hülfe der Bedeutung der Covariante H einer cubischen Form f (§. 16) ein,

Denn da diese, wenn

Sehnen des linearen Complexes (33) ist. (Cf. Salmon, Raumgeometrie pg. 436.)

Dem linearen Complexe gehören speciell vier Tangenten der Normcurve an, die sich aus (35) ergeben, wenn man die Argumente α, β, aus denen die σ_i gebildet sind, gleich λ setzt:

$$(37)\ \lambda^4 q_{01} - 2\lambda^3 q_{02} + \lambda^2 (q_{12} + 3\, q_{03}) - 2\lambda\, q_{13} + q_{23} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung (11) $J = 0$, nur dass hier statt der Coefficienten p die q stehen; wir wollen sie daher jetzt mit $J' = 0$ bezeichnen.

Dividirt man daher die Gleichung des Complexes durch q_{01}, wie auch die Gleichung (37), so erkennt man, dass die einfach unendliche Schaar von Complexen, die alle dieselben Tangenten (37) enthalten, durch die Relation

$$(38)\ \frac{q_{12}}{q_{01}} + \frac{3\, q_{03}}{q_{01}} = \text{const.} = S_2 \text{ oder } q_{12} + 3\, q_{03} - S_2\, q_{01} = 0$$

verbunden sind. Alle übrigen q, dividirt durch q_{01}, sind fest und zwar die bezüglichen elementar-symmetrischen Funktionen der vier Wurzeln von (37).

Die Gleichung (38) ist ersetzbar durch folgende:

$$(39)\ \frac{q_{12}}{q_{01}} = \frac{S_2}{2} + 3\,\mu, \quad 3\,\frac{q_{03}}{q_{01}} = \frac{S_2}{2} - 3\,\mu$$

wo μ ein variabler Parameter ist.

Daher sind alle linearen Complexe, die dieselben vier Tangenten (37) $J' = 0$ mit der Curve gemein haben, in der Form enthalten:

$$f \equiv x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3,$$

den Werth hat $H = \lambda^2 (3\, x_0\, x_2 - x_1^2) - \lambda (9\, x_0\, x_3 - x_1 x_2) + (3 x_1 x_1 - x_2^2)$ und das Punktepaar (der Curve) auf der durch den Punkt f gehenden Sehne darstellt, so braucht man nur die Coefficienten von H für die σ_i in (34) einzusetzen, um alle Punkte f (d. h. mit den Coordinaten x_i) unserer Regelfläche zu erhalten.

$$(40)\left\{\left\{p_{01}\frac{q_{23}}{q_{01}}+p_{23}+p_{02}\frac{q_{31}}{q_{01}}+p_{31}\frac{q_{02}}{q_{01}}\right\}+\frac{S_2}{6}(3p_{03}+p_{12})\right\}$$
$$+\mu(3p_{03}-p_{12})=0$$

oder wenn man für S_2 wieder seinen Werth $\frac{3q_{03}+q_{12}}{q_{01}}$ einsetzt

$$(40)\left\{p_{01}q_{23}+p_{23}q_{01}+p_{02}q_{31}+p_{31}q_{02}+\frac{(3p_{03}+p_{12})(3q_{03}+q_{12})}{6}\right\}$$
$$+\mu(3p_{03}-p_{12})q_{01}=0.$$

Nun ist aber der erste Theil dieser Gleichung (der von μ frei ist) nichts anderes als die bilineare Invariante der Formen:

$$(11)\ J=p_{01}\lambda^4-2p_{02}\lambda^3+\lambda^2(3p_{03}+p_{12})-2\lambda p_{13}+p_{23}$$
$$(37)\ J'=q_{01}\lambda^4-2q_{02}\lambda^3+\lambda^2(3q_{03}+q_{12})-2\lambda q_{13}+q_{23}$$

während der Faktor von μ, $=0$ gesetzt, den Nullcomplex der Curve darstellt *).

Mithin ist die allen Complexen der zum Quadrupel J' gehörigen Schaar gemeinsame Congruenz dieselbe, wie die diesen beiden speciellen Complexen gemeine.

Um diese zu finden, beweist man den wichtigen Satz:

„Soll eine Gerade des Geradenpaares (J) (d. h. des Paares, das die vier Tangenten $J=0$ trifft) eine Gerade des Geradenpaares (J') treffen, wo J, J' irgend zwei zu *einander apolare* Quadrupel sind, so ist dies nur so möglich, dass eine der beiden Invarianten i, i' verschwindet, d. h. wenn die Geraden wenigstens eines Paares coincidiren. Dann aber trifft diese eine Gerade beide des andern Paares."

*) Dieser ist noch insofern ein ausgezeichneter Complex der Schaar (40), als er nicht nur die vier Tangenten $J'=0$, sondern alle Tangenten der Curve enthält. (Cf. im übrigen §. 19.)

In der That ist ja die Apolaritätsbedingung für J, J' durch das Verschwinden des ersten Theiles der Gleichung (40) ausgedrückt:

$$(41)\ (p_{01}q_{23}+p_{23}q_{01}+p_{02}q_{31}+q_{02}p_{31})+\frac{(3p_{03}+p_{12})(3q_{03}+q_{12})}{6}=0$$

Soll diese mit der Bedingung des Schneidens einer Geraden p und einer Geraden q identisch sein, so muss der letzte Term:

$$(42)\ \frac{(3\,p_{03}+p_{12})\,(3\,q_{03}+q_{12})}{6}=p_{03}\,q_{12}+p_{12}\,q_{03}$$

sein, d. h. es findet die Bedingung:

$$(43)\ (3\,p_{03}-p_{12})\,(3\,q_{03}-q_{12})=0$$

statt: mithin muss eine der beiden Invarianten i, i' verschwinden *).

Verschwindet aber i, so trifft dann offenbar die Gerade p jede der beiden Geraden q.

Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Dann aber verschwindet Gleichung (40) für jeden Werth von μ und wir haben zunächst:

„Die Directricen der allen linearen Complexen, die dieselben vier Tangenten der Curve enthalten, gemeinsamen Congruenz sind die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels."

Insbesondere gilt dieser Satz für den Complex

$$(41)\ (JJ')^4=0$$

in folgender Weise (cf. Sturm pg. 142), wenn wir mittelst der homogenen symmetrischen Funktionen τ_i der Wurzeln von $J'=0$ die Gleichung (41) so schreiben:

---

*) Es geht dies auch so hervor. Eine Gerade des Geradenpaares (J) trifft eine solche des Paares (J') (wo aber jetzt J, J' ganz beliebig seien) unter der Bedingung (wie man leicht ausrechnet): (wenn $(JJ')^4$ die bilineare Invariante von J, J' bezeichnet) $(JJ')^4=ii'$. Verschwindet also eine Seite dieser Gleichung, so auch die andere.

$$(42)\ p_{01}\,\tau_4 - \frac{p_{02}}{2}\,\tau_3 + \frac{3\,p_{03}+p_{12}}{6}\,\tau_2 - \frac{p_{13}}{2}\,\tau_1 + p_{23}\,\tau_0 = 0.$$

„Die Gleichung

$$(43)\ a_\tau \equiv a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2 + a_3\,\tau_3 + a_4\,\tau_4 = 0$$

stellt einen linearen Complex dar, dessen mit dem Nullcomplex der Curve gemeinsame Congruenz zu Directricen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels

$$(44)\ a_\lambda \equiv a_0 + 4\,a_1\,\lambda + 6\,a_2\,\lambda^2 + 4\,a_3\,\lambda^3 + a_4\,\lambda^4$$

besitzt.

Die Linien der Congruenz sind die (einzigen) Treffgeraden aller zu a_λ apolaren und aequianharmonischen Tangentenquadrupel."

Aus Gleichung (41) folgt weiter unmittelbar, dass alle Geraden p, die dem Complex $(JJ')^4 = 0$ genügen, die Treffgeradenpaare aller zu J' apolaren Tangentenquadrupel sind, so dass wir den eben aufgeführten Satz noch in der Art ergänzen können, dass wir sagen:

„Die Gleichung $a_\tau = 0$ (die ja nach Kap. I, §. 5 alle zu a_λ apolaren Quadrupel darstellt) ergiebt vermöge aller Werthsysteme τ_ρ, die ihr genügen, die dreifach unendliche zu a_λ apolare Tangentenquadrupelschaar, deren Treffgeraden die Geraden des zugehörigen linearen Complexes sind."

Verschwindet im Speciellen die Invariante i von a_λ, so hat das Tangentenquadrupel (a_λ) selbst nur eine Treffgerade und diese wird nach dem aus den Gleichungen (41) (42) (43) abgeleiteten Satze von allen Treffgeradenpaaren der zu a_λ apolaren Quadrupel getroffen d. h.:

„Der lineare Complex

$$(43)\ a_\tau = 0$$

wird dann (und nur dann) zum speciellen, wenn das Tangentenquadrupel aequianharmonisch ist und daher nur eine Treffgerade (die Axe des speciellen Complexes) besitzt."

Die Ableitung weiterer hervorragender Eigenschaften des Complexes $a_\tau = 0$ soll dem nächsten Abschnitt vorbehalten bleiben, der eine eingehende Discussion dieser Gleichung (im Apolaritätssinne) enthält.

Im Übrigen sehe man nach bei Sturm, der auch eine Interpretation der Covarianten von a_λ mit diesem Complexe verknüpft, auf die wir gleichfalls noch genauer zurückkommen.

44. Dieser Abschnitt über die Normcurven soll einen vorläufigen Abschluss erhalten durch einen Satz, der ebenfalls später zu weiterer Verwerthung herangezogen wird und theilweise von Sturm (l. c. pg. 139) herrührt. Er bildet eine unmittelbare Anwendung des letzten Satzes. Zu diesem gelangt man, wenn man die fundamentale Eigenschaft der Darstellungsform (11) der Geraden, dass ihre Coefficienten vermöge der Gleichungen (21) (22) die beiden Treffgeraden des Tangenten-Quadrupels (11) darstellen, auf eine Involution vierter Ordnung

$$(45)\ a_\lambda^4 + kb_\lambda^4 = 0$$

überträgt, und nach Kap. I, §. 3 diese Involution ersetzt durch das Gleichungssystem (mit der dort eingeführten Abkürzung)

$$(46)\ \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0,$$

wo die aus den Formen $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$ zusammengesetzte Gruppe die zur Involution (45) conjugirte Gruppe ist, und wo alle den Gleichungen (46) genügenden Werthsysteme s_i die Wurzelsysteme aller Gleichungen (45) repräsentiren. Daraus folgt mit Hülfe der Entwicklungen der letzten Nummer sogleich:

„Die Treffgeradenpaare aller Tangentenquadrupel (45) einer Involution vierter Ordnung

bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloides, das den drei linearen Complexen (46) gemeinsam ist."
oder in anderer Fassung:

„Die zwei Geradenpaare, die zwei beliebige Tangentenquadrupel der Curve treffen, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Auf dieser liegen dann noch unendlich viele solche Geradenpaare, die alle der einen Schaar *) (auf der Fläche) angehören."

Ein anderer Beweis dieser Sätze, der zugleich zur Bedeutung der andern auf der Fläche zweiter Ordnung liegenden Regelschaar führt, führt sich so **):

Jeder der beiden linearen Complexe

$$(47)\ a_s = 0,\ \ b_s = 0$$

hat mit dem Nullcomplex der Curve eine Congruenz gemein, deren Directricen die Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel a_λ resp. b_λ sind; mithin müssen alle Geraden, die diesen beiden Complexen mit dem Nullcomplex gemein sind, beide Geradenpaare (a_λ) (b_λ) treffen. Da es aber ihrer unendlich viele sein müssen, so treffen sie alle diese beiden Geradenpaare und bilden somit diejenige Regelschaar einer so bestimmten Fläche zweiter Ordnung, der jene beiden Geradenpaare nicht angehören.

Wir drücken dies Resultat so aus:

„Die beiden Regelschaaren, die auf der durch

---

*) Die Geraden dieser Schaar sind daher paarweise in Bezug auf den Nullcomplex der Curve conjugirt, mithin herrscht zwischen ihnen eine projektivisch-involutorische Beziehung, deren Doppelelemente die beiden sich selbst conjugirten Geraden sind, die den beiden in der Involution (45) enthaltenen aequianharmonischen Quadrupeln entsprechen.

**) Gerade wie dies gewöhnlich für irgend drei lineare Complexe bewiesen wird.

die Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung

$$(45) \quad a_\lambda^4 + k\, b_\lambda^4 = 0$$

bestimmten Fläche zweiter Ordnung liegen, sind dargestellt, einmal durch die drei linearen Complexe

$$(46) \quad \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0,$$

andrerseits durch die drei anderen:

$$(48) \quad a_s = 0,\ b_s = 0,\ i = 0 \text{ (oder } 3p_{03} - p_{12} = 0).\text{“}$$

Nun giebt es, wie bekannt, sechs Quadrupel der Involution (45) der Form

„$\alpha, \alpha, \beta, \gamma$“

wo die α die sechs (durch die Funktionaldeterminante von a_λ^4, b_λ^4 dargestellten) Doppelelemente der Involution sind.

Diese sechs Tangenten-Quadrupel stellen die einzigen der Involution dar, für die zwei Tangenten sich (auf einem Punkte der Curve) treffen und (zugleich) in einer Ebene (der Curve) liegen.

Die beiden Treffgeraden der vier Tangenten α, α, β, γ sind daher einmal eine Gerade, die durch den Punkt α der Curve geht, andrerseits eine solche, die in der Ebene α der Curve liegt. Und da bekanntlich jede Ebene durch eine Gerade einer Fläche zweiter Ordnung eine (Tangential-) Ebene der Fläche ist, so haben wir für unsere Involution den dritten Satz:

„Die durch eine Involution vierter Ordnung (45) bestimmte Fläche zweiter Ordnung trifft die Curve N_3 in sechs Punkten, deren Ebenen zugleich die der Fläche (als Klassenfläche) mit der Curve (N_3) gemeinsamen Ebenen sind.“

Und mit Hülfe des später zu erweisenden Satzes, dass

es 5 Involutionen vierter Ordnung mit denselben (sechs) Doppelelementen giebt, folgt hier:

„Durch irgend sechs Raumpunkte gehen fünf Flächen zweiter Ordnung der Art, dass ihre Tangentialebenen in den Punkten immer *dieselben* sind und zwar die Ebenen der durch die sechs Punkte bestimmten cubischen Raumcurve."

Mithin sind diese fünf Flächen einmal in der Form

$(i = 1, \ldots 5)\ \lambda_{i1} f_1 + \lambda_{i2} f_2 + \lambda_{i3} f_3 + \lambda_{i4} f_4 = 0,$

und zugleich in der andern:

$$l_{i1} F_1 + l_{i2} F_2 + l_{i3} F_3 + l_{i4} F_4 = 0$$

darstellbar, wo die $f_i = 0$ vier Flächen zweiter Ordnung mit sechs gemeinschaftlichen Punkten und die $F_i = 0$ vier Flächen zweiter Classe mit sechs gemeinschaftlichen Tangentialebenen sind.

Auf die Eigenschaften der Involutionen vierter Ordnung auf cubischen Raumcurven im Weiteren können wir erst nach Vermehrung unserer Hülfsmittel von anderer Seite her des Genaueren eingehen. Es hat ja auch dieser Abschnitt nur den Zweck, mit den elementarsten Grundeigenschaften der Normcurven bekannt zu machen, um so einen Untergrund für die folgenden, ganz allmählich verwickelter werdenden Untersuchungen über die Apolarität zu gewinnen.

Zum Schluss soll noch einmal daran erinnert werden, dass alle Formeln dieses Abschnittes mittelst des Kap. I §. 7 dargelegten Verfahrens auf einen beliebigen Kegelschnitt resp. cubische Raumcurve (d. h. genauer, die auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen sind) übertragen werden können.

Die nächsten Abschnitte entwickeln einige Hülfsformeln für die einfachsten Fälle, dass ein (sonst) beliebiger Kegelschnitt zum Normkegelschnitte, resp. eine (sonst) beliebige Fläche zweiter Ordnung zur cubischen Normcurve apolar ist,

was wiederum genügen wird, die allgemeinen Formeln deutlich hervortreten zu lassen. Diese Hülfsformeln führen dann von selbst zur Betrachtung der invarianten (Apolaritäts-) Eigenschaften der binären Formen vierten und sechsten Grades.

Abschnitt II.

Die binäre biquadratische Form und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

§. 17
Der Normkegelschnitt.

45. Nach Reye [30] heissen zwei Kegelschnitte (1)

$$\begin{cases} a_x^2 = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + 2a_{01}\, x_0 x_1 + \ldots = 0 \\ u_\alpha^2 = \Sigma\Sigma\, \alpha_{ik}\, u_i\, u_k = \alpha_{00}\, u_0^2 + \alpha_{11}\, u_1^2 + \alpha_{22}\, u_2^2 + 2\alpha_{01}\, u_0 u_1 + \ldots = 0 \end{cases}$$

(zu einander) apolar, wenn ihre bilineare Invariante verschwindet d. h. wenn

$$(2)\ (a\alpha)^2 = \Sigma\Sigma a_{ik}\, \alpha_{ik} = a_{00}\, \alpha_{00} + a_{11}\, \alpha_{11} + a_{22}\, \alpha_{22} + 2a_{01}\, \alpha_{01} + 2a_{02}\, \alpha_{02} + 2a_{12}\, \alpha_{12} = 0,$$

und zur genaueren Unterscheidung führt er weiter die Benennung ein:

„Der (Ordnungs-)Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ stützt (trägt) in diesem Falle den (Klassen-) Kegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$: umgekehrt stützt sich dann (ruht) der letztere auf den (dem) ersteren."

Dann giebt es bekanntlich, wie zuerst Hesse [31] gefunden, ein und damit (einfach) unendlich viele Polardreiecke von $a_x^2 = 0$, die $u_\alpha^2 = 0$ *um*-, und (dualistisch) zugleich unendlich viele Polardreiecke von $u_\alpha^2 = 0$, die $a_x^2 = 0$ einbeschrieben sind.

Machen wir (durch Coordinatentransformation) den Klassenkegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ zum Normkegelschnitt N_2 (§. 12)

$$(3)\quad u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

so geht die Bedingung (2) in die einfachere über:

$$(4)\quad a_{02} = a_{11}.$$

Desgleichen ergiebt sich in dem entsprechenden Falle, dass der Ordnungskegelschnitt $a_x^2 = 0$ zum Normkegelschnitt N_2 (cf. ebenda)

$$(5)\quad 4x_0 x_2 - x_1^2 = 0$$

gewählt wird, die Bedingung (2) in der Form

$$(6)\quad 4\alpha_{02} = \alpha_{11}.$$

Wir fassen dies in dem Satze zusammen:

„Unter der Bedingung $a_{02} = a_{11}$ trägt der Ordnungskegelschnitt $a_x^2 = 0$ den Normkegelschnitt N_2 und unter der Bedingung $4\alpha_{02} = \alpha_{11}$ ruht der Klassenkegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ auf dem Normkegelschnitt N_2."

In der Regel machen wir nur vom ersten Theile dieses Satzes Gebrauch.

46. Sehen wir jetzt, wie sich die Bedingung für ein in Bezug auf den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar modificirt, falls derselbe die Forderung erfüllt, den Normkegelschnitt N_2 zu tragen.

Irgend ein in Bezug auf $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar (x) (y) ist dargestellt durch

$$(7)\quad a_x a_y = x_0 (a_{00} y_0 + a_{01} y_1 + a_{02} y_2) + x_1 (a_{10} y_0 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + x_2 (a_{20} y_0 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2) = 0.$$

Mit Anwendung des letzten Satzes und unter dementsprechender Einführung der Bezeichnungen:

$$(8)\; a_{00} = a_0,\; a_{01} = a_1,\; a_{02} = a_{11} = a_2,\; a_{12} = a_3,\; a_{22} = a_4$$

(sodass allgemein $a_{ik} = a_{i+k}$ wird)
gewinnt die Bedingung (3) die übersichtlichere Form:

(9) $a_x a_y = x_0 (a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2) + x_1 (a_1 y_0 + a_2 y_1 + a_3 y_2) + x_2 (a_2 y_0 + a_3 y_1 + a_4 y_2) = 0.$

Mit Rücksicht auf den Fundamentalsatz des §. 12 setzen wir:

$$(10) \quad \frac{x_2}{x_0} = \alpha\beta, \quad \frac{x_1}{x_0} = \alpha + \beta; \quad \frac{y_2}{y_0} = \gamma\delta, \quad \frac{y_1}{y_0} = \gamma + \delta$$

wo α, β resp. γ, δ die Argumente der vom Punkte x resp. y an N_2 gehenden Tangenten seien. Wir bezeichnen daher die Punkte auch durch (α, β) resp. (γ, δ).

Führen wir endlich noch die homogenen symmetrischen Funktionen s_i $(i = 0, \ldots 4)$ der vier Werthe α, β, γ, δ ein, so dass

$$(11) \quad \frac{s_1}{s_0} = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad \frac{s_2}{s_0} = \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots,$$
$$\frac{s_3}{s_0} = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \ldots, \quad \frac{s_4}{s_0} = \alpha\beta\gamma\delta$$

so nimmt die Gleichung (7) (cf. Nr. 21) unter der festgesetzten Apolaritätsbedingung die endgiltige Gestalt an:

(12) $a_x a_y = a_s = a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0$

was wir durch den Satz hervorheben wollen:

„Trägt der Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ den Normkegelschnitt N_2, so ist irgend ein in Bezug auf den ersteren conjugirtes Punctepaar (α, β) (γ, δ) durch die Gleichung (12) dargestellt" und umgekehrt „Ist die Gleichung (12) durch ein Werthsystem α, β, γ, δ befriedigt, so sind (α, β) (γ, δ); (α, γ) (β, δ); (α, δ) (β, γ) drei solche conjugirte Punktepaare" oder kürzer: „die Gleichung (12) stellt die (dreifach) unendliche Schaar von N_2 umschriebenen

Polvierseiten des zu N_2 apolaren Kegelschnitts $a_x^2 = 0$ dar."

47. Dieser letzte Satz möge zunächst durch einige Zusätze des Näheren illustrirt werden. Er steht nemlich in engster Beziehung zu dem Hesse'schen Satze [32]:

„Zu zwei in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt conjugirten Punktepaaren gehört stets ein drittes, das mit jenen die Gegenecken eines vollständigen Vierseits bildet."

Man wird auf die Existenz eines derartigen Satzes und ähnlicher durch eine Überlegung geführt, die uns noch öfters von Nutzen sein wird.

Bezeichnet, wie oben, $a_x a_y = 0$ die Bedingung für ein in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar, so wird durch zwei solche beliebig angenommene Paare mindestens noch ein weiteres bestimmt, wenn eine Relation von der Form

$$(13)\ k_1\, a_{x_1}\, a_{y_1} + k_2\, a_{x_2}\, a_{y_2} + k_3\, a_{x_3\, y_3} = 0$$

statt hat, wo die k Constante und $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ die beiden gegebenen Paare sind, und zwar muss dieselbe, wenn ein drittes Punktepaar durch die beiden ersten allein, unabhängig von dem gewählten Kegelschnitt, bestimmt sein soll, in Bezug auf die a_{ik} identisch erfüllt sein.

In der That verschwindet ja das dritte Glied der Relation (13), sobald dies die beiden ersten thun, und zur Bestimmung der 6 Unbekannten (der Coordinaten der Punkte (x_3) (y_3) nebst den Verhältnissen der k) sind die erforderlichen sechs Gleichungen vorhanden.

Zu dem Satze selbst und seinem Beweise gelangt man sogleich durch Einführung des Apolaritätsbegriffes mit Benützung der einfachen Entwicklungen der beiden vorigen Nummern.

Denn die beiden beliebig angenommenen Punktepaare bestimmen ein Vierseit, dem man eine Schaar von Klassenkegelschnitten einbeschreiben kann. Unter ihnen befindet sich immer einer und nur einer, der gemäss der Bedingung (2) auf irgend einem beliebig, aber fest angenommenen (Ordnungs-) Kegelschnitte ruht, woraus, wenn man diesen Klassenkegelschnitt zum Normkegelschnitt N_2 macht, der letzte Satz der vorigen Nummer und damit der Hesse'sche Satz folgt, da ja die Lage des letzteren Kegelschnitts von der des Vierseits ganz unabhängig ist.

Umgekehrt führt aber wieder der (auf irgend eine andere Art jetzt als bewiesen anzunehmende) Hesse'sche Satz auf den letzten Satz der vorigen Nummer.

Denn sollen schon durch ein irgendwie gegebenes conjugirtes Punktepaar weitere bestimmt sein, sodass sich die Identität (13) auf die Form

$$(14)\quad a_{x_1}\, a_{y_1} + k\, a_{x_2}\, a_{y_2} = 0$$

reducirt, so muss zwischen den Coefficienten a_{ik} irgend eine lineare Relation herrschen. Denn nur dann reduciren sich die sechs in dieser Identität enthaltenen Gleichungen auf fünf, die erforderlich sind, um die fünf jetzt vorhandenen Unbekannten (die Coordinaten der Punkte (x_2) (y_2) nebst k) zu berechnen.

Eine solche lineare Relation (2) sagt aber aus, dass der Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ zu einem andern $u_\alpha^2 = 0$ apolar ist, woraus, wenn man den letzteren zum Normkegelschnitt N_2 macht, der gewünschte Satz folgt.

48. An den Satz der Nummer 46 knüpft sich nun eine ganze Reihe von Beziehungen, die in einzelnen Sätzen festgelegt werden sollen.

Zunächst spricht er sich, da der Normkegelschnitt N_2, abgesehen von der ihm auferlegten Apolaritätsbedingung ganz beliebig ist, auch so aus:

α) „Wenn ein Kegelschnitt f einen andern φ trägt, so giebt es (dreifach) unendlich viele dem letzteren umschriebene Polvierseite des ersteren (und reciprok (dreifach) unendlich viele dem ersteren einbeschriebene Polvierecke des letzteren)."

β) „Unter diesen Vierseiten (Vierecken) giebt es speciell eine (einfach) unendliche Schaar von solchen, für die eine Seite (Ecke) unbestimmt wird. Dies sind (cf. No. 45, 50) die Hesse'schen Poldreiseite (Poldreiecke)."

γ) „Ist irgend ein Punktepaar (x, y) conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt f *), so sind es auch die beiden andern Paare $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ die mit dem ersten die drei Paare Gegenecken eines Tangentenvierseits des Kegelschnitts φ bilden."

Setzt man in der Gleichung des Kegelschnitts (1) $a_x^2 = 0$ mit Benützung der Bezeichnungen (8) (10) $\alpha = \beta = \lambda$, so gelangt man zur Gleichung für die Schnittpunkte desselben mit dem Normkegelschnitt ($N_2 = \mathrm{N}_2$) (d. h. genauer zur Gleichung der Argumente derselben auf N_2):

$$(15)\quad a_\lambda^4 \equiv a_\lambda = a_0 + 4\,a_1\,\lambda + 6\,a_2\,\lambda^2 + 4\,a_3\,\lambda^3 + a_4\,\lambda^4 = 0$$

Dies geht aus

$$(12)\quad a_s = 0$$

durch Gleichsetzen aller vier Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta := \lambda$ hervor.

Dann ist aber nach Früherem jedes der Gleichung (12) genügende Quadrupel (s_i) zum Quadrupel (15) apolar und umgekehrt stellt (12) alle zu (15) apolaren Quadrupel dar. Man hat daher:

*) Von jetzt ab möge, falls es nicht besonders wünschenswerth erscheint, die dualistische Hälfte der Sätze unterdrückt werden.

δ) „Die den φ umschriebenen Polvierseiten von f (auf φ) zugehörigen (Argumenten-) Quadrupel sind sämmtlich apolar zum Schnittpunktquadrupel beider Kegelschnitte (d. h. zum Quadrupel ihrer Argumente auf φ). Umgekehrt sind *alle* zu dem letzteren Quadrupel apolaren die (Argumenten-) Quadrupel jener Tangentenvierseite von φ" oder mit der früher eingeführten (Rosanes'schen) Bezeichnung:

„Die zum Schnittpunktquadrupel ($f\varphi$) (auf φ betrachtet) *conjugirte Gruppe* bildet (vermöge der ihr zugehörigen Tangenten von φ) die sämmtlichen φ umschriebenen Polvierseite von f".

Um auszudrücken, dass auch umgekehrt die Gleichung (12) durch (15) eindeutig bestimmt ist, sprechen wir den einfachen, aber öfters als Hilfssatz dienenden Satz aus:

ε) „Unter dem Kegelschnittbüschel, das seine Grundpunkte (15) auf φ liegen hat, befindet sich ein und nur ein Kegelschnitt, der φ trägt. Von diesem gelten dann die Sätze (α)(β)(γ)(δ)".

Die Form (15) kann auch nach Nr. 26 ersetzt werden durch die ganze ihr conjugirte Gruppe, die von der Form ist

$$(16)\quad \varkappa_1\, \varphi_1(\lambda) + \varkappa_2\, \varphi_2(\lambda) + \varkappa_3\, \varphi_3(\lambda) + \varkappa_4\, \varphi_4(\lambda) = 0$$

Diese ist sehr leicht vermöge der Wurzeln von (15) darzustellen.

Denn da, wenn $(\lambda-\lambda_1)$ ein Faktor von a_λ, die Form $(\lambda-\lambda_1)^4$ zu a_λ apolar ist (nach dem Rosanes'schen Fundamentalsatz), so geht (16), wenn die Wurzeln von (15) mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bezeichnet werden, sofort über in die andere Form

$$(17)\quad \nu_1\,(\lambda-\lambda_1)^4 + \nu_2\,(\lambda-\lambda_2)^4 + \nu_3\,(\lambda-\lambda_3)^4 + \nu_4(\lambda-\lambda_4)^4 = 0.$$

Umgekehrt kann man stets von vier ganz beliebigen biquadratischen Formen $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, $\varphi_3(\lambda)$, $\varphi_4(\lambda)$ ausgehen, dann

ist immer eine Form (12) a_s resp. (15) a_λ bestimmt und zwar ergiebt sich aus dem Verfahren des §. 3 ohne Weiteres, dass die Coefficienten a den respectiven vierreihigen Determinanten des Coefficientensystems der $\varphi_1(\lambda)$ proportional sind. Geometrisch heisst dies für uns jetzt:

ζ) „Irgend vier einem Kegelschnitt φ umschriebene Vierseite bestimmen einen zu φ apolaren Kegelschnitt f (der dann aus φ das zu jenen vier Quadrupeln apolare ausschneidet und), dessen Polvierseite sie sind.“ .

Da nach Satz (ε) durch eine biquadratische Form (15) a_λ auf φ ein einziger zu φ apolarer Kegelschnitt f bestimmt ist, mithin ein einziges Quadrupel auf φ, dessen Tangenten zugleic: Tangenten von f sind, dessen Lage also von der Parametervertheilung auf φ ganz unabhängig ist, so ist dies eine Covariante vierten Grades von a_λ d. h. da es nur eine solche giebt, deren Hesse'sche Form H.

Man überzeugt sich auch direkt durch leichte Rechnung davon. Denn man erhält das gesuchte gemeinsame Tangentenquadrupel ($f\varphi$) d. h. seine Argumente auf φ, wenn man φ als Normkegelschnitt N_2 wählt, durch Combination der Parametergleichung für N_2 (§. 12):

$$(18)\ \tau u_2 = 1,\ \ \tau u_1 = -\lambda,\ \ \tau u_0 = \lambda^2$$

mit der Klassengleichung von f, die bekanntlich lautet (mit Rücksicht auf (8)):

$$(19)\ u_A^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & u_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & u_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

also durch die Gleichung:

$$(20)\ 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \lambda^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -\lambda \\ a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \lambda^4 (a_2 a_4 - a_3^2) + 2\lambda^3 (a_1 a_4 - a_2 a_3) \\ + \lambda^2 \{(a_0 a_4 - a_2^2) + 2 (a_1 a_2 - a_2^2)\} \\ + 2\lambda (a_0 a_3 - a_1 a_2) + (a_0 a_2 - a_1^2) \end{array}$$

deren rechte Seite bekanntlich H ist [33].

η) „Das gemeinsame Tangentenquadrupel zweier apolaren Kegelschnitte f, φ ist auf φ durch die Hesse'sche Form des gemeinsamen Punktquadrupels derselben (auf φ betrachtet) dargestellt (und reciprok das gemeinsame Punktquadrupel auf f durch die Hesse'sche Form des gemeinsamen Tangentenquadrupels (auf f gerechnet))."

Daraus ist umgekehrt sofort ersichtlich (Nr. 40) wie es stets zwei binäre biquadratische Formen giebt, die eine andere gegebene solche Form zur Hesse'schen Covariante haben, denn unter der Schaar von Kegelschnitten, die mit φ vier feste Tangenten gemein haben, giebt es zwei, die φ tragen, und die man vermöge Einsetzung der Bedingung (2) resp. (4) in die Gleichung der Schaar (in Punktcoordinaten) erhält.

49. Wir kommen jetzt zum wichtigsten Satze, der zeigt, wie die Bedingung der Apolarität zweier binärer biquadratischer Formen (von der Gestalt (15)):

$$(21)\ a_\lambda^4,\ b_\lambda^4$$

$$\text{d. i.}\quad (22)\ (ab)^4 = 0$$

sich unmittelbar in die ternäre Apolaritätsbedingung zweier den Formen (21) entsprechender Kegelschnitte verwandelt.

Wir gelangen dazu, wenn wir ausser dem bisher betrachteten Kegelschnitt f (unter der Bedingung (8))

$$(23)\ a_x^2 = 0$$

der den Normkegelschnitt N_2 trägt und aus ihm als N_2 das Punktquadrupel

$$(23)\ a_\lambda^4 = 0$$

ausschneidet, noch den Klassenkegelschnitt Φ:

$$(24)\ u_\beta^2 = 0$$

ins Auge fassen, der auf dem Normkegelschnitt N_2 ruht und mit ihm (als N_2) das Tangentenquadrupel

$$(24)'\ b_\lambda^4 = 0$$

gemein hat.

Die erste dem Kegelschnitt Φ auferlegte Bedingung lautet nach (6):

$$(25)\ 4\ \beta_{02} = \beta_{11}$$

d. h. es hat Φ die Form:

$$(24) u_{\beta 2} \equiv \beta_{00} u_0^2 + 2\beta_1 u_0 u_1 + 2\beta_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) + 2\beta_{12} u_1 u_2 + \beta_{22} u_2^2 = 0$$

oder, wenn wir analog den Gleichungen (8)

$$(25)\ \beta_{ik} = \beta_{i+k}$$

setzen, die andere:

$$(26) u_\beta^2 \equiv \beta_0 u_0^2 + 2\beta_1 u_0 u_1 + 2\beta_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) + 2\beta_3 u_1 u_2 + \beta_4 u_2^2.$$

Um das mit N_2 gemeinsame Tangentenquadrupel zu erhalten, combiniren wir (26) mit

$$(27)\ \tau u_2 = 1,\ \ \tau u_1 = -\lambda,\ \ \tau u_0 = \lambda^2,$$

und finden für das gesuchte Quadrupel (auf N_2):

$$(28)\ \beta_\lambda^4 \equiv \beta_0 \lambda^4 - 2\beta_1 \lambda^3 + 6\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_3 \lambda + \beta_4 = 0$$

Soll nun nach der zweiten Bedingung für Φ β_λ^4 identisch mit (24) b_λ^4 sein, so bestimmen sich die Coefficienten β aus den b in folgender Art:

$$(29)\ \tau\beta_0 = b_4,\ \tau\beta_1 = -2\,b_3,\ \tau\beta_2 = b_2,\ \tau\beta_3 = -2\,b_1,\ \tau\beta_4 = b_0,$$

so dass sich die Originalbedingung für die beiden binären Formen a_λ^4, b_λ^4 jetzt so schreibt:

(22) $(ab)^4 = \alpha_0 \beta_0 + 2\,\alpha_1 \beta_1 + 6\,\alpha_2 \beta_2 + 2\,\alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4 = 0.$

Andrerseits ist dies aber die Apolaritätsbedingung für die beiden Kegelschnitte f, Φ wegen der Bedingungen

(8) (25) $\alpha_{ik} = \alpha_{i+k}, \quad \beta_{ik} = \beta_{i+k}.$

Damit ist der oben angedeutete Satz in folgender Weise gewonnen:

ι_1) „Wenn ein Kegelschnitt K einen Kegelschnitt Φ stützt und zugleich auf einem andern Kegelschnitt f ruht, und sind ausserdem f und Φ apolar zu einander, so sind auch die beiden Quadrupel auf K, die den Schnittpunkten mit f resp. den Tangenten mit Φ zugehören, apolar und umgekehrt," oder in anderer Fassung:

ι_2) „Sind auf K irgend zwei Quadrupel gegeben, so geht (cf. „ε") durch das eine Quadrupel ein einziger Kegelschnitt f, der K stützt, und die Tangenten des andern Quadrupels sind zugleich Tangenten eines einzigen Kegelschnitts Φ, der auf K ruht."

„Sind dann die beiden Quadrupel apolar, so auch die Kegelschnitte f, Φ und umgekehrt."

(Ebenso gehört reciprok zum ersten Quadrupel ein Kegelschnitt Φ_1, und zum zweiten ein anderer f_1, für die dann dasselbe gilt.)

Was aber von irgend einem zu a_λ^4 apolaren Quadrupel b_λ^4 gilt, gilt dann auch von der ganzen zu a_λ^4 conjugirten Gruppe. Machen wir Gebrauch von der einfachen Abkürzung:

„Zu einem Quadrupel auf einem Kegelschnitt *gehört* irgend ein Kegelschnitt f, wenn er durch die *Punkte* des Quadrupels geht, und *gehört* irgend ein Kegelschnitt Φ wenn er die Tangenten des Quadrupels zu Tangenten hat," so können wir der gemeinten Erweiterung folgende, für uns wichtige,

Gestalt geben (in der der Satz, wie überhaupt alles, was dieser Abschnitt bis jetzt behandelt hat, worunter auch insbesondere der Satz η. einer Verallgemeinerung auf Räume beliebig hoher Dimension fähig ist, die später zur Sprache kommen soll):

$\varkappa$) „Wenn ein Kegelschnitt f einen andern φ trägt, so *gehört* zur ganzen (dreifach unendlichen) Schaar von Tangentenvierseiten von φ, die Polvierseite von f sind, eine (dreifach unendliche) Schaar von Kegelschnitten, die alle auf f und φ ruhen.

Jedem Vierseit gehört *ein* solcher Kegelschnitt zu und umgekehrt. Andrerseits ist diese Kegelschnittschaar auch die *vollständige* auf f und φ ruhende Schaar.

Reciprok gehört zur ganzen (dreifach unendlichen) Schaar von Punktvierecken von f, die Polvierecke von φ sind, die (dreifach unendliche) Schaar von Kegelschnitten, die f und φ stützen."

Eine weitere Verwerthung dieser Sätze (ι) ($\varkappa$) wird bei der Theorie der Involution vierten Grades ihre Stelle finden.

50. Wir gehen jetzt über zur näheren Erklärung des Satzes (β), der den Zusammenhang der Hesse'schen Poldreiseite mit unsern Polvierseiten betrifft. Die Hauptgleichung (12) $a_4 = 0$ für die N_2 umschriebenen Polvierseite von f kann man auch, gemäss der allgemeinen Zerlegung (Nr. 21) in der Form schreiben:

$$(30)\quad (a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3) + \lambda_4\,(a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3) = 0$$

wie die σ die homogenen symmetrischen Funktionen der drei Argumente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ seien. (Wir schreiben jetzt bequemer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ anstatt der früheren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.)

Im allgemeinen kann man von einem Tangentenvierseit

von N_2 resp. (φ), das Polvierseit von f ist, drei Tangenten beliebig annehmen, dann ist die vierte eindeutig bestimmt, wie (30) zeigt.

Bilden aber die drei Geraden (λ_1 λ_2 λ_3) mit jeder andern Tangente von N_2 ein Polvierseit von f, so bilden sie bekanntlich ein Poldreieck von f.

Da dann λ_4 unbestimmt werden muss, so sind die (Hesse'schen) N_2 umschriebenen Poldreiecke von f dargestellt durch:

$$(31) \quad \begin{cases} a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = 0 \equiv A_1 \\ a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2 + a_4 \sigma_3 = 0 \equiv A_2 \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind nach §. 5 die dritten Ueberschiebungen der ersten Differentialquotienten von a_λ^4 mit der variabeln cubischen Form (die das Poldreieck d. h. seine Seiten als Tangenten von N_2 darstellt). Daher können wir mit Rücksicht auf die Darstellung conjugirter Gruppen (§. 4, 5) die Formel (31) so in Worte fassen:

(β') „Die (einfach) unendlich vielen φ umschriebenen Poldreiseite von f, die in Folge der Apolarität von f und φ nach Hesse existiren, sind hinsichtlich ihrer Argumente *auf* φ dargestellt durch die Involution dritten Grades, die conjugirt ist zur Involution der ersten Polaren derjenigen biquadratischen Form, die die Schnittpunkte ($f\,\varphi$) auf φ darstellt.“

Diese Tangententripel auf φ sind dann selbst wieder die Polaren einer andern biquadratischen Form a'_λ, deren Punktquadrupel (nach Nr. 40 und (η)) ein Kegelschnitt f' zugehört, der φ trägt und dieselben vier Tangenten wie f mit ihm gemein hat.

Umgekehrt kann man (§. 17) anstatt von der Form a_λ

resp. a'_λ von einer ganz beliebigen Involution dritten Grades auf φ ausgehen. Denn zu ihr gehört eine ganz bestimmte biquadratische Form a_λ, deren Polareninvolution die gegebene ist (und deren Funktionaldeterminante die Hesse'sche Form von a_λ ist).

Dies liefert den (bekannten)[34] Satz, der hier als Spezialfall von (ζ) auftritt:

ζ') „Irgend zwei einem Kegelschnitt φ umschriebene Dreiseite sind Poldreiseite eines bestimmten zweiten φ stützenden Kegelschnitts f. Dann giebt es eine ganze (einfach unendliche) Schaar (Involution) von solchen φ umschriebenen Poldreiseiten von f."

51. Die Vergleichung dieses Satzes mit dem andern gleichfalls bekannten:

λ) „Durch die Ecken zweier einem Kegelschnitt φ umschriebenen Dreiseite geht ein ganz bestimmter zweiter Kegelschnitt H. Dann giebt es eine ganze (einfach unendliche) Schaar (Involution) von φ umschriebenen Dreiseiten, deren Ecken auf H liegen."

wird den Ausgangspunkt einer ausgedehnten Theorie bilden, deren erste Elemente hier bei der Theorie der biquadratischen binären Form auftreten.

Sehen wir zunächst, wie dieser Satz (λ) aus der Betrachtung der Form

$$(12)\quad a_s = 0$$

fliesst. Diese konnte durch die beiden Gleichungen

$$(31)\ A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

ersetzt werden, denn umgekehrt lässt sich aus diesen wieder a_s zusammensetzen. Die Gleichungen (31) lassen sich, wenn man auf sie den Prozess, durch den $a_s = 0$ in die Form

$$(30)\ A_1 + \lambda_4 A_2 = 0$$

überging, noch einmal anwendet, auch so schreiben:

$$(32)\ \begin{cases} A_1 = (a_0\tau_0 + a_1\tau_1 + a_2\tau_2) + \lambda_3(a_1\tau_0 + a_2\tau_1 + a_3\tau_2) = A_{11} + \lambda_3 A_{12} \\ A_2 = (a_1\tau_0 + a_2\tau_1 + a_3\tau_2) + \lambda_3(a_2\tau_0 + a_3\tau_1 + a_4\tau_2) = A_{21} + \lambda_3 A_{22} \end{cases}$$

(wo die τ aus den zwei Argumenten $\lambda_1\ \lambda_2$ gebildet sind), die durch Elimination von λ_3 in die eine Gleichung übergehen:

$$(33)\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{H}_\tau^2 = 0.$$

Dann stellt jedes Werthsystem $\lambda_1\ \lambda_2$ (d. h. τ_1), das dieser Gleichung $\mathrm{H} = 0$ genügt, zugleich ein solches dar, das auch die Gleichungen (31) befriedigt.

Damit ist mit Rücksicht auf die Bemerkung, die dem Satze (ζ') voranging, der Satz (λ) bewiesen und zugleich in Beziehung zum Satze (ζ') gesetzt, die sich so formulirt:

λ') „Der Kegelschnitt H, der nach Satz (λ) durch die Ecken der nach Satz (ζ') φ umschriebenen Poldreiseite von f geht (wo f und φ apolar sind) ist durch (33) dargestellt."

Und da für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ die linke Seite von (33) in die Hesse'sche Form H von (15) a_λ^4 übergeht, andrerseits aber dieser Process das Quadrupel der Schnittpunkte des Kegelschnitts H mit dem Normkegelschnitt liefert, so resultirt daraus mit Benützung des Satzes η der weitere Satz:

μ) „Trägt ein Kegelschnitt f einen andern φ, so geht durch die auf φ liegenden Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von f und φ derjenige Kegelschnitt H, dem alle φ umschriebenen Poldreiseite von f einbeschrieben sind."

Gehen wir, um die Natur der Gleichung (33) besser zu

erkennen, von einer beliebigen Involution dritten Grades $x_\lambda + ky_\lambda$ (was nach dem Früheren erlaubt ist) aus; wo

$$(34)\quad \begin{cases} x_\lambda \equiv x_0\lambda^3 - x_1\lambda^2 + x_2\lambda - x_3 = 0 \\ y_\lambda \equiv y_0\lambda^3 - y_1\lambda^2 + y_2\lambda - y_3 = 0 \end{cases}$$

deren Wurzelsysteme dargestellt sind durch (cf. §. 3)

$$(35)\quad \begin{cases} u_s \equiv u_0 s_0 + u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3 = 0 \\ v_s \equiv v_0 s_0 + v_1 s_1 + v_2 s_2 + v_3 s_3 = 0 \end{cases}$$

wo die x, y mit den u, v durch die Relationen verknüpft sind:

(36) $(xy)_{ik} = (uv)_{lm}$ $(i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$ oder $p_{ik} = q_{lm}$,

so erscheint H_τ jetzt in der Form (in der wir es als H'_τ bezeichnen):

$$(37)\quad H'_\tau \equiv \begin{vmatrix} u_0 s_0 + u_1 s_1 + u_2 s_2, & u_1 s_0 + u_2 s_1 + u_3 s_2 \\ v_0 s_0 + v_1 s_1 + v_2 s_2, & v_1 s_0 + v_2 s_1 + v_3 s_2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv s_0^2 q_{01} + s_0 s_1 q_{02} + s_0 s_2 (q_{03} - q_{12}) + s_1^2 q_{12} + s_1 s_2 q_{13} + s_2^2 q_{23}.$$

Soll daher irgend ein Kegelschnitt

$$(38)\quad k_\sigma^2 \equiv k_{00}\sigma_0^2 + 2k_{01}\sigma_0\sigma_1 + \ldots$$

in die Form (37) gebracht werden können, so ergiebt sich durch Proportionalsetzen der Coefficienten und Anwendung der zwischen den q geltenden Relation

$$(39)\quad q_{01}q_{23} + q_{02}q_{31} + q_{03}q_{12} = 0$$

für die k die Bedingung[35]:

$$(40)\quad k_{00}k_{22} - 4k_{01}k_{12} + k_{11}(2k_{02} + k_{11}) = 0.$$

Man kann daher auch so sagen:

v) „K a n n m a n d i e C o e f f i c i e n t e n e i n e s K e g e l s c h n i t t s (38) a l s L i n i e n c o o r d i n a t e n a u f f a s s e n, i n d e r W e i s e, d a s s m a n s e t z e n d a r f:

$$(41)\quad \begin{cases} \rho k_{00} = p_{01}, \ 2\rho k_{01} = p_{02}, \ \rho k_{11} = p_{03}, \\ \rho k_{22} = p_{23}, \ 2\rho k_{12} = p_{13}, \ \rho(2k_{02} + k_{11}) = p_{12}, \end{cases}$$

s o g i e b t e s e i n (u n d d a m i t u n e n d l i c h v i e l e) D r e i-

ecke, die dem Normkegelschnitt N_2 um- und dem Kegelschnitt (38) einbeschrieben sind."

Daher gehen durch ein gegebenes Punktquadrupel H auf N_2 zwei solcher Kegelschnitte; die respectiven Dreiecke sind Poldreiecke von zwei andern Kegelschnitten, die N_2 stützen und N_2 in den resp. Quadrupeln a_λ, a'_λ treffen, deren Hesse'sche Form beidemal H ist (cf. (μ)).

Wir kommen auf die Relation (40) noch einmal zurück bei der Betrachtung der biquadratischen Form auf den cubischen Raum- (Norm-)Curven, und werden dort sehen, dass unter der Schaar linearer Complexe (cf. Nr. 43), die dieselben vier Tangenten (H) der Curve gemein haben, die beiden Complexe (40) die der Schaar angehörigen speziellen sind.

In der That ist der Kegelschnitt $H'_{:}$ durch die Involution (34) auf N_2 gerade so bestimmt, wie die Gerade (die Axe des speziellen linearen Complexes) durch dieselbe Involution auf N_3 (cf. Nr. 36).

§. 18.

Die canonische Form der Kegelschnitte F und H.

52. Wir gelangen jetzt zur Theorie der canonischen Formen der beiden mit einem Grundkegelschnitt φ in der angegebenen Weise verknüpften Kegelschnitte f und H und werden dabei erkennen, was wieder als Ausgangspunkt viel ausgedehnterer Untersuchungen erscheinen wird, dass die gewöhnliche auf unsere Sätze der vorigen Nummern bezügliche canonische Form jener Kegelschnitte geradezu identisch ist mit der gewöhnlichen canonischen Form einer biquadratischen binären Form (und zwar unserer Grundform a_λ) resp. ihrer dadurch bestimmten Hesse'schen.

Zu diesem Zwecke leiten wir vorerst zwei Hauptformeln

ab, die für das Folgende (dieses Abschnitts) genügen werden. Diese entspringen der Frage:

„Welche Form nimmt die Gleichung der Kegelschnitte $f(a_\sigma^2)$ und H (H_σ^2) an, wenn die Grundform a_λ^4 als Summe von vierten Potenzen auftritt?"

I. Die Gleichung des ersten Kegelschnitts war:

$$(41)\quad a_\sigma^2 = \sigma_0 (a_0\, \sigma_0 + a_1\, \sigma_1 + a_2\, \sigma_2) + \sigma_1 (a_1\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_1 + a_3\, \sigma_2) + \sigma_2 (a_2\, \sigma_0 + a_3\, \sigma_1 + a_4\, \sigma_2) = 0$$

wo die Klammerfaktoren aus den zweiten Differentialquotienten von a_λ durch Polarisation nach λ_1, λ_2 entstehen.

Ist nun

$$(42)\quad a_\lambda \equiv \sum_i \nu_i (\lambda + \alpha_i)^4 \equiv f$$

so werden die zweiten Differentialquotienten (durch die Zahl 12 dividirt gedacht):

$$(43)\quad f_{11} \equiv \sum_i \nu_i (\lambda + \alpha_i)^2 \quad f_{12} \equiv \sum_i \nu_i\, \alpha_i (\lambda + \alpha_i)^2$$
$$f_{22} \equiv \sum_i \nu_i\, \alpha_i^2 (\lambda + \alpha_i)^2,$$

mithin wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(44)\quad A_i \equiv \sigma_2 + \sigma_1\, \alpha_i + \sigma_0\, \alpha_i^2$$

die Form a_σ^2 (41) jetzt nacheinander folgende:

$$(45)\quad a_\sigma^2 \equiv \sigma_2 \sum_i (\nu_i\, A_i) + \sigma_1 \sum_i (\nu_i\, \alpha_i\, A_i) + \sigma_0 \sum_i (\nu_i\, \alpha_i^2\, A_i)$$
$$\equiv \sum_i \nu_i\, A_i (\sigma_2 + \sigma_1\, \alpha_i + \sigma_0\, \alpha_i^2) \equiv \sum_i \nu_i\, A_i^2.$$

II. Die Gleichung des zweiten Kegelschnitts war:

$$(46)\quad H_\sigma^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0\, \sigma_0 + a_1\, \sigma_1 + a_2\, \sigma_2, & a_1\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_1 + a_3\, \sigma_2, \\ a_1\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_1 + a_3\, \sigma_2, & a_2\, \sigma_0 + a_3\, \sigma_1 + a_4\, \sigma_2, \end{vmatrix}$$

also nach der Entwicklung von I:

$$(47)\quad H_\sigma^2 \equiv \begin{vmatrix} \sum_i (\nu_i\, A_i), & \sum_i (\nu_i\, \alpha_i\, A_i) \\ \sum_i (\nu_i \alpha_i A_i), & \sum_i (\nu_i\, \alpha_i^2\, A_i) \end{vmatrix}$$

oder nach leichter Rechnung:

$$(48)\ H_\sigma^2 = \sum_i \sum_k (\nu_i \nu_k A_i A_k (\alpha_i - \alpha_k)^2.$$

53. Wenden wir diese Ergebnisse auf die N_2 (φ) umschriebenen Polvierseite und Poldreiseite von f an.

Benützen wir den schon öfters herangezogenen Hülfssatz:

„Sind die Formen a_λ^4 und b_λ^4 apolar, und seien ihre Wurzeln resp. α_i, β_i ($i = 1, \ldots 4$), so ist sowohl (und nur dann)

$$a_\lambda^4 \text{ in der Form } \sum_{i=1}^{i=4} a_i (\lambda - \alpha_i)^4 \text{ als}$$

$$b_\lambda^4 \text{ in der Form } \sum_{i=1}^{i=4} b_i (\lambda - \beta_i)^4$$

darstellbar" oder in anderer Fassung:

„Soll a_λ^4 in der Form $\sum_{i=1}^{i=4} a_i (\lambda - \alpha_i)^4$ darstellbar sein, so müssen die a_i der Gleichung $a_s = 0$ genügen und umg."

so können wir sagen:

0_1) „Der den Normkegelschnitt stützende und aus ihm das Quadrupel a_λ^4 ausschneidende Kegelschnitt f ist immer in der Form

$$(45)'\ a_\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=4} \nu_i A_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=4} \nu_i (\sigma_2 + \sigma_1 \alpha_i + \sigma_0 \alpha_i^2)^2$$

darstellbar, wo die α_i irgend ein Werthquadrupel der N_2 umschriebenen Polvierseite von f darstellen."

Oder, da die $A_i = 0$ gesetzt, die Geraden dieses Polvierseits selber vorstellen:

0_2) „Der einen Kegelschnitt φ stützende Kegelschnitt f nimmt, auf irgend eines seiner φ umschriebenen Polvierseite bezogen, die Form (45)' an."

Umgekehrt kann man von irgend einem der sechsfach unendlich vielen Polvierseite eines beliebigen Kegelschnitts f ausgehen; durch dieses ist φ eindeutig bestimmt und damit die Gleichung (45)'.

Nun ist aber bekanntlich irgend ein Kegelschnitt f, auf eines seiner Polvierseite $y_1 = 0, \ldots y_4 = 0$ bezogen, stets in die Form zu bringen:

$$(49) \quad \Sigma \mu_i \, y_i^2 = 0.$$

Man gelangt daher, von dieser Form rückwärts ausgehend, falls man φ zum Normkegelschnitt macht, wieder zur Form a_λ^4.

Entsprechend geht der zweite Kegelschnitt H, bezogen auf die Polvierseite von f, in die Form über:

$$(48)' \quad \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} (\nu_i \, \nu_k \, A_i \, A_k \, (\alpha_i - \alpha_k)^2)$$

Diese Form wird erst von Interesse, wenn wir, wie gleich geschehen wird, als specielle Polvierseite von f die Poldreiseite in's Auge fassen.

54. Bleiben von den Grössen α_i, aus deren vierten Potenzen sich a_λ^4 linear zusammensetzt, drei fest, während die vierte unbestimmt wird, so kann man die letztere gleich der Variabeln λ nehmen und erhält dann:

$$(50) \quad a_\lambda^4 \equiv \sum_{i=1}^{i=3} a_i (\lambda - \alpha_i)^4.$$

Diese Tripel α_i erfüllen dann nach Nr. 50 die Relationen

$$(31) \quad A_1 = 0, \; A_2 = 0$$

d. h. sie sind die Tripel der N_2 umschriebenen Poldreiseite von f.

Dann nehmen, auf ein solches Dreiseit bezogen, die Kegelschnitte f, H die Formen an:

$$(51)\begin{cases} f = a_\sigma^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \nu_i A_i^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \nu_i (\sigma_2 + \sigma_1 \alpha_i + \sigma_2 \alpha_i^2)^2 = 0 \\ H = H_\sigma^2 = \nu_1 \nu_2 \nu_3 A_1 A_2 A_3 \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\nu_3 A_3} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)^2}{\nu_1 A_1} + \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)^2}{\nu_2 A_2} \right\} = 0 \end{cases}$$

woraus die geometrische Eigenschaft des zweiten Kegelschnitts, den N_2 umschriebenen Poldreiseiten von f umschrieben zu sein, in die Augen springt.

Damit ist aber wieder die Umkehrung des ganzen Verfahrens in folgender Weise ermöglicht.

π) I. Zwei Kegelschnitte φ und f mögen in der Beziehung stehen, dass es ein φ umschriebenes Poldreiseit von f giebt. Dann ist die Gleichung von f, wenn $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Seiten des Dreiseits sind, immer in die Form zu bringen:

$$(52)\ f = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \mu_3 y_3^2 = 0.$$

(Ist φ mit dem Dreiseit gegeben, so stellt (52) bei variabeln μ die ganze Schaar der zugehörigen Kegelschnitte f dar.)

Ist dann auf φ ein Parameter ausgebreitet und seien α_1, α_2, α_3 die Argumente der Seiten des Dreiseits (oder, wenn man will, ihrer Berührungspunkte auf φ), so trifft f den Kegelschnitt φ in den Punkten

$$(53)\ a_\lambda^4 = \mu_1 (\lambda - \alpha_1)^4 + \mu_2 (\lambda - \alpha_2)^4 + \mu_3 (\lambda - \alpha_3)^4.$$

Des Weiteren stützt f den Kegelschnitt φ, und zwar ergiebt $a_s = 0$ *) die Argumente der Quadrupel der φ umschriebenen Polvierseite von f; $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die der Tripel der φ umschriebenen Poldreiseite von f etc. etc.

*) Und zwar nimmt a_s dann, wenn wir mit $A_i(\sigma)$ (51) bezeichnen, dass A_i in den σ geschrieben ist, die einfache Eorm an:

$$a_s = \sum_1^3 \nu_i\ A_i(\sigma)\ A_i(\tau) = 0$$

wo die σ aus λ_1 λ_2, die τ aus λ_3 λ_4, und die (links stehenden) s aus λ_1 λ_2 λ_3 λ_4 gebildet sind.

π) II. Zwei Kegelschnitte φ und H mögen in der Beziehung stehen, dass es ein φ um- und f einbeschriebenes Dreieck giebt. Dann lässt sich, wenn $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ die Seiten des Dreiecks sind, f immer in die Form bringen:

$$(54)\ \frac{\mu_1'}{z_1} + \frac{\mu_2'}{z_2} + \frac{\mu_3'}{z_3} = 0.$$

(Ist φ mit dem Dreiseit gegeben, so stellt (54) bei variabeln μ' die ganze Schaar der zugehörigen Kegelschnitte H dar.)

Sind β_2 die Argumente der drei Seiten z_1 (als Tangenten von φ) so trifft H den Kegelschnitt φ in den Punkten:

$$(55)\ H_\lambda^4 \equiv \frac{\mu_1'}{(\lambda-\beta_1)^2} + \frac{\mu_2'}{(\lambda-\beta_2)^2} + \frac{\mu_3'}{(\lambda-\beta_3)^2} = 0.$$

Das Dreiseit ist dann zugleich Poldreiseit eines zweiten Kegelschnitts f:

$$(56)\ M_1 z_1^2 + M_2 z_2^2 + M_3 z_3^2 = 0$$

wo die M mit den μ' durch die Relationen verknüpft sind:

$$(57)\ \rho\mu_1' = \frac{(\beta_k-\beta_1)^2}{M_1}.$$

Dann lässt sich wieder der Satz I. anwenden, und zwar sind dann alle Poldreiseite von f, die φ umschrieben sind, zugleich H einbeschrieben etc. etc.

Damit ist denn in der That die gegenseitige Zurückführbarkeit der canonischen Formen der Kegelschnitte (52) (54) auf die bezüglichen der biquadratischen Form (50) und ihrer Hesse'schen (55) und umg. dargethan.

55. Daran schliesst sich nun unmittelbar die Bedeutung der Invariante j der biquadratischen Form a_λ^4. Denn diese In-

variante verschwindet bekanntlich, wenn es möglich sein soll, a_λ^4 als Summe von zwei vierten Potenzen darzustellen.

Dies geht in der That aus der Zusammensetzung der Form a_s sofort hervor. Denn soll es ein Werthepaar $\alpha_1, \alpha_2 (\tau_i)$ geben, das mit jedem Werthepaar $\lambda_1, \lambda_2 (\sigma_i)$ ein $a_s = 0$ befriedigendes Quadrupel ergiebt, so müssen in der Gleichung

$$a_s = \tau_0 (a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2) + \tau_1 (a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2) \\ + \tau_2 (a_2 s_0 + a_3 s_1 + a_4 s_2) = 0$$

die drei Klammerfaktoren verschwinden, was (für ein bestimmtes Werthepaar) unter der Bedingung

$$(58)\ j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ stattfindet.}$$

Dann bilden α_1, α_2 auch mit jedem Werthe λ ein den Gleichungen

$$(31)\ A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

genügendes Tripel, so dass es erlaubt ist, in der Form (50)

$$(50)\ a_\lambda^4 \equiv \sum_1^3 a_i (\lambda - a_i)^4$$

α_3 gleich λ zu nehmen, wodurch sich die erste Seite reducirt auf:

$$(59)\ a_1 (\lambda - \alpha_1)^4 + a_2 (\lambda - a_2)^4 \equiv a_\lambda$$

ρ) „Dann zerfällt, wie aus (51) ersichtlich, der Kegelschnitt f in die beiden Geraden

$$(60)\ \sqrt{a_1}\, A_1 + \sqrt{a_2}\, A_2 = 0,\ \sqrt{a_1}\, A_1 - \sqrt{a_2}\, A_2 = 0$$

sowie der Kegelschnitt H in die beiden andern

$$(61)\ \mathrm{A}_1 = 0,\ \mathrm{A}_2 = 0\text{“}$$

Das erstere geht auch daraus sofort hervor, dass j mit der Determinante des Kegelschnitts a_σ^2 identisch ist.

Andrerseits sind dann die vier Wurzelwerthe von α_λ^4 har-

monisch zu einander, etwa $(\lambda_1 \lambda_2)$ zu $(\lambda_3 \lambda_4)$. Dies geht auch aus (60) mit Hülfe des Fundamentalsatzes der Nro. 31 hervor. Denn aus ihm leuchtet ein, dass die Geraden (60) in Bezug auf den Kegelschnitt N_2 (φ) conjugirt sind, d. h. dass ihre Schnittpunktepaare mit demselben zu einander harmonisch liegen, zugleich aber auch, dass das zu den beiden Geraden harmonische Tangentenpaar (61) den zwei Argumenten $(\alpha_1 \alpha_2)$ zugehört, das sowohl zu $\lambda_1 \lambda_2$ als zu $\lambda_3 \lambda_4$ harmonisch ist.

Aus (61) ist auch das bekannte Resultat abzulesen, dass wenn die Invariante j der Form a_λ^4 verschwindet, die Hesse'sche Form H von a_λ^4 zwei doppeltzählende Wurzeln besitzt.

Die angegebene Bedeutung des Verschwindens von j für den Kegelschnitt f wird auch weiterhin vielfache Verwendung finden.

56. Die Bedeutung der Hesse'schen Form H von a_λ^4 ist im Obigen schon nach mehreren Seiten hin untersucht worden. Wir heben noch eine hervor, die unmittelbar aus (33) folgt und im Satze (μ) schon implicite steckt:

σ_1) „Unter den sämmtlichen einem Kegelschnitt φ umschriebenen Poldreiseiten eines andern φ stützenden Kegelschnitts f befinden sich vier specielle von der Art, dass zwei der drei Seiten coincidirt sind.

Diese doppelt zählenden Geraden sind die gemeinsamen Tangenten von f und φ."

Da aber der Process, durch den H aus H_τ^2 (33) entsteht, auch so aufzufassen ist, dass man aus den beiden Gleichungen

$$(62)\quad \begin{cases} \lambda^2 (a_0 \mu + a_1) + 2 \lambda (a_1 \mu + a_2) + (a_2 \mu + a_3) = 0 \\ \lambda^2 (a_1 \mu + a_2) + 2 \lambda (a_2 \mu + a_3) + (a_3 \mu + a_4) = 0 \end{cases}$$

μ eliminirt, so ergeben sich andrerseits die vier Geraden (Tan-

genten von N_2 (φ)), die mit den (doppelt zählenden) Geraden H die vier ausgezeichneten Poldreiseite von f liefern, durch Elimination von λ aus (62).

Dies liefert daher eine andere Covariante vierten Grades, die dann bekanntlich immer von der Form $f + k\,H$ sein muss.

Durch Ausrechnung ergiebt sich leicht, dass diese neue Covariante folgende ist

$$(63)\ \mathrm{P} = 2\,jf - 3\,i\,H = 0.$$

Aus der Eigenschaft der Kegelschnitte f, H folgt dann sofort:

σ_2) „Die Berührungspunkte der den apolaren Kegelschnitten f, φ gemeinsamen Tangenten auf φ sind die einzigen Punkte auf φ, deren Polaren in Bezug auf f wieder Tangenten von φ sind. Die letzteren sind durch die Gleichung (63) $\mathrm{P} = 0$ gegeben. Der Kegelschnitt H (der durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten f, φ auf φ geht) berührt die vier Tangenten $\mathrm{P} = 0$ in ihren Schnittpunkten mit jenen gemeinsamen Tangenten von f und φ."

57. Die Bedeutung der Covariante sechsten Grades

$$(64)\ \Theta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}$$

wird sich in ihrem vollen Umfange erst in der Theorie der Involutionen vierter Ordnung übersehen lassen, indem ja alle Eigenschaften der Funktionaldeterminante einer solchen Involution sich für Θ specialisiren lassen.

Hier mögen nur die beiden zunächst liegenden Eigenschaften von Θ Platz finden.

Theilt man die Wurzeln von a_λ^4 (und dies ist auf dreifache Weise möglich) in zwei Paare, so giebt es drei Werthepaare, von denen jedes zu zwei solchen Paaren zugleich harmonisch

ist: dies sind bekanntlich die drei Wurzelpaare von $\Theta = 0$ d. h. hier (mit Hülfe des Satzes der pg. 106)

τ_1) „Die Ecken des den Kegelschnitten des Büschels, die auf einem gegebenen (φ) das Quadrupel a_λ^4 ausschneiden, gemeinsamen Polardreiecks sind durch $\Theta = 0$ dargestellt.“

Legt man einem dieser drei Wurzelpaare die Argumente 0, ∞ bei, so verschwinden in a_λ^4 die Coefficienten a_1, a_3, und die Gleichung $a_s = 0$ (30) wird daher für diese canonische Form von a_λ^4:

$$(65)\quad a_s \equiv (a_0\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_2) + \lambda_4\, (a_2\, \sigma_1 + a_4\, \sigma_3) = 0.$$

Daraus folgt aber sofort, dass sowohl der Werth 0, dreifach gezählt, mit dem Werthe ∞, als umgekehrt der Werth ∞, dreifach gezählt, mit dem Werthe 0, je ein der Gleichung $a\ = 0$ genügendes Quadrupel bilden. Daher können wir auch so sagen:

τ_2) „Die drei den Wurzelpaaren von Θ zugehörigen Tangentenpaare auf φ haben die Eigenschaft, dass jedes von ihnen (indem man je eine der Tangenten des Paares dreifach rechnet) ein Paar von *Polvierseiten* des zu φ apolaren Kegelschnitts f darstellt.“

Diese Eigenschaft kommt aber thatsächlich, wie leicht zu sehen, wieder auf die des vorigen Satzes zurück, dass das Dreieck der drei Punkte (Wurzelpaare) $\Theta = 0$ sowohl Polardreieck von φ als von f ist.

58. Das Verschwinden der Invariante i, da dann a_λ^4 zu sich selbst apolar ist, hat wegen der sonst bekannten Eigenschaft den Satz zur Folge (cf. pg. 70, 80 und Nro. 83):

φ) „Trägt ein Kegelschnitt f einen andern φ, so bilden die Tangenten an φ in den Schnitt-

punkten beider nur dann ein Polvierseit von f, wenn das Schnittpunktquadrupel ein aequianharmonisches ist und umgekehrt." „Ausserdem sind alle φ umschriebenen Poldreiseite von f apolar zu einander."

Dies seien die Sätze über die Darstellung der biquadratischen Form auf einem Kegelschnitt, deren manche schon bekannt sind und die wir nur einer gewissen Vollständigkeit wegen zusammengestellt haben, um auf sie bei den späteren schwierigeren Untersuchungen als auf den einfachsten Typus zurückgreifen zu können.

§. 19.

Die Darstellung der biquadratischen binären Form auf der cubischen Normcurve.

59. Das Folgende bildet eine erste Ergänzung und Weiterführung der Theorie der cubischen Normcurven (§. 12 ff.), speciell der Theorie des linearen Complexes $a_s = 0$, soweit es mit Benützung der Methoden des §. 17 möglich ist.

Die damals (pg. 79) abgeleitete Fundamentaleigenschaft dieses Complexes möge hier kurz recapitulirt werden.

α) „Der lineare Complex $a_s = 0$ wird gebildet von den Treffgeradenpaaren der Tangentenquadrupel der cubischen Curve, deren Argumente die Gleichung $a_s = 0$ befriedigen oder, was dasselbe ist, die zu a_λ conjugirte Gruppe bilden."

„Speciell enthält er die Congruenz, deren Directricen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels a_λ sind."

Das letztere Quadrupel bildet gerade die vier Tangenten, die der Complex mit der Curve gemein hat. Umgekehrt aber gab es ein ganzes Complexbüschel, dessen Individuen alle

diese vier Tangenten nebst der Congruenz ihres Treffgeradenpaares enthalten. Unter ihnen befand sich auch der Nullcomplex der Curve, so dass das Complexbüschel dargestellt war durch:

$$(1)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

Wie nun diesem Büschel in der Ebene (cf. §. 17) ein Kegelschnittbüschel entsprach, und zwar dem Nullcomplex der Normkegelschnitt und dem andern ($a_s = 0$) der den Normkegelschnitt stützende und das Quadrupel a_λ ausschneidende Kegelschnitt, so kann man auch hier fragen:

Wodurch ist der Complex $a_s = 0$ unter den Complexen des Büschels (1) ausgezeichnet?

Dies ergiebt sich leicht so. Die Sehnen (σ_i) der Normcurve, die einem beliebig gegebenen linearen Complex

$$(2)\ \Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0$$

(wo die q beliebige Coefficienten sind) angehören, waren dargestellt durch die Gleichung (pag. 75):

$$(3) (q_{23}\sigma_0^2 + q_{31}\sigma_0\sigma_1 + q_{20}\sigma_1\sigma_2 + q_{01}\sigma_2^2) + \frac{q_{12}}{3}\sigma_2^2 + (3q_{03} - \frac{q_{12}}{3})\sigma_0\sigma_2 = 0.$$

Die Gleichung für die dem Complexe (2) angehörigen Axen der Curve ging aus der letzten durch Umtauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} oder auch von $3\,q_{03}$ mit q_{12} hervor. Soll aber der Kegelschnitt (3) den Normkegelschnitt stützen, so müssen die Coefficienten von σ_1^2 und $2\,\sigma_0\,\sigma_2$ einander gleich sein d. h.

$$(4)\ \frac{2\,q_{12}}{3} = 3\,q_{03} - \frac{q_{12}}{3} \text{ oder } 3\,q_{03} = q_{12}.$$

Für die Gleichung des Complexes $a_s = 0$ ist:

$$(5)\ \rho q_{12} = 3\,a_2,\quad \rho q_{03} = a_2, \text{ also } 3\,q_{03} = q_{12}.$$

Dies liefert aber den Satz:

β_1) „Unter allen linearen Complexen, die vier feste Tangenten (a_λ) einer cubischen Raumcurve enthalten, ist

$$a_s = 0$$

dadurch ausgezeichnet, dass die ihm angehörige Axen der Curve die den ihm angehörigen Sehne *zugehörigen* sind d. h. wo die beiden Ebenen eine solchen Axe (an die Curve) zugleich die Ebenen de Punkte der entsprechenden Sehne sind." „Ode kürzer: der Complex $a_s = 0$ ist sich selber co jugirt" *).

Oder, da ja (pg. 75) diese Sehnen und Axen eines lineare Complexes immer auf derselben Fläche liegen:

β_2) „Die Fläche der Sehnen und Axen der Curv die dem Complexe

$$a_s = 0$$

angehören, ist in Bezug auf die Curve vollständig *z sich selbst dualistisch.*"

Nun war der dem Complexe $a_s = 0$ entsprechende Kegelschnitt (§. 17) einfach gegeben durch:

$$(6)\ a_\sigma^2 = 0$$

wo (6) aus $a_s = 0$ hervorging, indem man von den vier in den s_1 steckenden Argumenten je zwei (etwa $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$) gleichsetzte.

In der That ist ja dann (cf. (α)) das Treffgeradenpaar dieses Quadrupels ($\lambda, \lambda, \lambda', \lambda'$) aus Sehne und Axe ($\lambda\lambda'$) gebildet und umgekehrt wird eine Sehne oder Axe immer nur von einem solchen Tangentenquadrupel ($\lambda, \lambda, \lambda', \lambda'$) getroffen.

60. Greift man aus der Schaar der zu a_λ conjugirten Qua-

*) D. h. in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve. In der That ist ja irgend ein Geradenpaar in Bezug auf ihn (cf. pg. 75) ein conjugirtes, wenn die beiden Geraden durch Vertauschung von 3 p_{03} und p_{12} in einander übergehen. Mithin besteht der Complex $a_s = 0$ nur aus conjugirten Geradenpaaren.

drupel irgend zwei heraus, so bilden diese eine Involution vierten Grades, deren es also eine vierfach unendliche Schaar giebt.

Nach Nro. 44 (pg. 80 f.) liegen die Treffgeradenpaare aller Tangentenquadrupel einer Involution vierter Ordnung auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren mit der Curve gemeinsame Ebenen die (Schmiegungs-) Ebenen in den ihr mit der Curve gemeinsamen Punkten sind und zwar bilden sie die eine Regelschaar dieser Fläche.

„Solcher Regelschaaren, die nach dem Hauptsatz (α) *alle dem Complexe* $a_s = 0$ *angehören*, giebt es also eine vierfach unendliche Schaar."

Unter diesen Regelschaaren giebt es gewisse ausgezeichnete, die mit den Covarianten von a_λ in der engsten Beziehung stehen.

Vor allem verdienen diejenigen unsere Aufmerksamkeit, die drei Tangenten der Curve enthalten und die uns auch später von ganz anderer Seite her wieder begegnen werden *).

Haben nemlich alle Quadrupel einer in der zu a_λ conjugirten Gruppe enthaltenen Involution einen festen cubischen Faktor (mit den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), so wird das vierte Argument λ_4, das mit den drei ersten ein Quadrupel liefert, das der Gleichung $a_s = 0$ genügt, unbestimmt und es sind somit (cf. pg. 96) zur Bestimmung eines solchen Tripels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Gleichungen vorhanden:

$$\begin{cases} A_1 \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0 \\ A_2 \equiv a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 s_3 = 0 \end{cases}$$

*) Nemlich als Specialfall der Regelschaaren, die drei Axen (Sehnen) der cubischen Curve enthalten, die in der Theorie der biquadratischen Involution eine hervorragende Rolle spielen.

Unter Regelschaar ist übrigens immer nur eine solche zweiter Ordnung verstanden.

Dann aber sind die Treffgeraden der einem solchen Tripel zugehörigen Involution vierter Ordnung offenbar die Geradenschaar des durch die drei Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmten Hyperboloids, der diese Tangenten nicht angehören.

Soll umgekehrt eine drei Tangenten der Curve treffende Regelschaar dem Complex $a_s = 0$ angehören, so gäbe es noch unendlich viele vierte Tangenten, die mit jenen drei ein Quadrupel $a_s = 0$ bildeten, d. h. λ_4 würde unbestimmt und wir sehen daher:

(γ_1) „Das Gleichungspaar (7)

$$A_1 = 0, \; A_2 = 0$$

stellt alle (einfach unendlich vielen) Tangententripel der Curve dar, deren (sie treffende) Regelschaaren (zweiter Ordnung) dem Complexe

$$a_s = 0 = A_1 + \lambda_4 A_2$$

angehören."

Über solche Regelschaaren vgl. auch Sturm pg. 143.

Rücken von einem solchen Tangententripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zwei Tangenten zusammen ($\lambda_1 = \lambda_2 = \eta$) so zerfällt die zugehörige Regelschaar in zwei Strahlbüschel, einmal in das von allen Geraden gebildete, die den Berührungspunkt der Tangente η auf der Curve mit allen Punkten der Tangente λ_3 verbinden, und dann in das von allen Geraden erzeugte, die in der Ebene η der Curve liegen und dessen Centrum der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Tangente λ_3 ist. Diese beiden Strahlbüschel liegen also in zwei Ebenen des Complexes $a_s = 0$, die den bezüglichen beiden Centren in ihm angehören. Da man ausserdem sogleich erkennt, dass in keinem andern Falle eine der durch (7) bestimmten Regelschaaren zerfallen kann, so ergiebt sich zunächst:

(γ_2) Es giebt unter den (Tangententripel-) Regelschaaren (7) des Complexes $a_s = 0$ vier zerfallende

und zwar bestehen diese dann jedesmal aus zwei Strahlbüscheln des Complexes, deren Centrum für den ersten Büschel ein Curvenpunkt, deren Ebene für den zweiten Büschel eine Curvenebene ist.

61. Nun sahen wir (pg. 107), dass die Hesse'sche Form H von a_λ diese vier Werthe η repräsentirt, während die vier Restargumente λ_3 durch die Covariante $P = 2\,jf - 3i\,H$ gegeben wurden. Dies liefert den Satz, dessen ersten Theil man bei Sturm pg. 145 findet:

(γ_3) „Die Hesse'sche Form H von a_λ ergiebt ein solches Quadrupel von Curvenpunkten, dass die ihnen im Complexe $a_s = 0$ zugeordneten Ebenen die Curve noch ausserdem (im Punkte λ_3) *berühren.*

Diese vier Berührungspunkte sind durch

$$(8)\ P \equiv 2\,jf - 3i\,H = 0$$

dargestellt."

Oder in der vollkommen dualistischen Fassung:

(γ_4) „Es giebt vier ausgezeichnete Ebenen der Curve, so dass der Punkt, der einer jeden durch den Complex $a_s = 0$ zugeordnet ist, auf einer Tangente der Curve liegt."

Das Ebenenquadrupel ist durch $P = 2jf - 3iH$, } gegeben.
das Tangentenquadrupel durch H }

Wendet man den Satz über die durch eine Tangenteninvolution vierter Ordnung auf der Curve bestimmte Regelfläche noch einmal auf f und H an (deren Funktionaldeterminante ja die Covariante Θ ist) so ergiebt sich:

(δ) Das Geradenpaar, welches das Tangentenquadrupel des Satzes (γ_4) trifft, liegt mit demjenigen, welches das Tangentenquadrupel a_λ

8*

trifft, auf einer Fläche zweiter Ordnung, auf der alle Treffgeradenpaare der Quadrupel

$$f + k H$$

liegen, und die die Curve in den sechs Punkten $\Theta = 0$ schneidet, deren Schmiegungsebenen zugleich Tangentialebenen der Fläche sind."

Auf andere Bedeutungen von Θ kommen wir weiter unten.

62. Verschwand die Invariante j (pg. 106), so gab es ein Dupel (δ_1, δ_2), das mit jedem Dupel $(\lambda_3 \lambda_4)$ ein zu a_λ apolares Quadrupel bildete. d. h.

(ε) „Verschwindet die Invariante j von a_λ, so giebt es (und nur dann) eine dem Complexe $a_s = 0$ angehörige Congruenz, deren Directricen zwei Tangenten (δ_1, δ_2) der Curve sind."

Dann wird bekanntlich die Hesse'sche Form von a_λ ein Quadrat (der quadratischen Form mit den Wurzeln δ_1, δ_2) und ist zugleich ein zu a_λ apolares Quadrupel, und identisch mit P.

In der That ist dann nach dem letzten Satze evident, dass alle Regelschaaren (7) der Congruenz der beiden Tangenten δ_1, δ_2 angehören, also die Tangentenebenen der Curve, die zugleich die Complexebenen ihres Restpunktes sind, nur noch die Tangentenebenen δ_1, δ_2 sein können, die noch durch δ_2 resp. δ_1 gehen. Die Sehne und Axe (δ_1, δ_2) gehören der Congruenz des letzten Satzes an, mithin ist H zu a_λ apolar etc.

Verschwindet j mit i (cf. auch §. 21), so fallen δ_1, δ_2 (in δ) zusammen; a_λ erhält eine dreifache Potenz als Faktor, H wird eine vierfache Potenz. Geometrisch ist dann bemerkenswerth:

(ζ) „Verschwinden i und j, so wird der Complex $a_s = 0$ derart ein specieller, dass seine Axe eine Gerade wird, die sowohl durch den Punkt δ

der Curve geht, als in der Ebene δ derselben liegt. Die Congruenz des letzten Satzes zerfällt dann in das Strahlenbündel des Punktes δ und das Geradenfeld der Ebene δ."

Was dagegen vom Verschwinden der Invariante i gilt, mag kurz aus Nro. 39 wiederholt werden.

(η) „Verschwindet i, so wird der Complex $a_s=0$ ein specieller und seine Axe ist eine im Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirte Gerade."

63. Um jetzt auf die Covariante Θ von a_λ zurückzukommen, so wissen wir aus Nro. 57, dass ihre Wurzeln drei Paare ε_i, η_i, $(i = 1, 2, 3)$ bilden der Art, dass sowohl $(\lambda-\varepsilon_i)^3 (\lambda-\eta_i)$ als $(\lambda-\eta_i)^3 (\lambda-\varepsilon_i)$ zu a_λ apolare Quadrupel sind. Dies können wir in Bezug auf den Complex zunächst so ausdrücken:

(ι_1) „Es giebt drei Punktepaare (ε_i, η_i) (die Wurzeln von Θ) derart, dass sowohl die Gerade, die durch den Punkt ε_i geht, in der Ebene ε_i liegt und die Tangente η_i trifft, als die aus ihr durch Vertauschung von ε_i mit η_i hervorgehende, dem Complexe $a_s = 0$ angehören."

Da weiter die aus den beiden Quadrupeln gebildete Involution vierter Ordnung

$$(9)\ (\lambda - \varepsilon_i)(\lambda - \eta_i)\left\{(\lambda - \varepsilon_i)^2 + k\,(\lambda - \eta_i)^2\right\}$$

sich aus dem festen Paare (ε_i, η_i) und der gewöhnlichen Involution, deren Doppelelemente $\varepsilon_i\ \eta_i$ sind, zusammensetzt, so haben wir mit Rücksicht auf Nr. 44 den Satz:

(ι_2) „Es giebt drei dem Complexe $a_s = 0$ angehörige Regelschaaren zweiter Ordnung von der Eigenschaft, dass ihre Geraden ausser von zwei festen Tangenten ε_i, η_i noch von den Tangenten-

paaren getroffen werden, deren Elementenpaare die gewöhnliche Involution mit den Doppelelementen $\varepsilon_1 \eta_1$ bilden."

Fassen wir eine solche Regelschaar, die durch irgend ein Tangentenpaar der Curve eindeutig bestimmt ist, und zur Curve in invarianter Beziehung steht, noch näher in's Auge.

Um ihre Gleichung in canonischer Form aufzustellen, machen wir die vorgelegte Curve zur Normcurve und nehmen das Tangentenpaar 0, ∞ zum Ausgangspunkt. Dann ist jedes Tangentenquadrupel der vorgelegten Involution

$$(10) \quad \lambda\mu\,(\lambda^2 + \varkappa\mu^2)$$

von der Art, dass die Coefficienten von λ^4, $\lambda^2\mu^2$, μ^4 verschwinden. Andrerseits war die Darstellungsform irgend eines Tangentenquadrupels (resp. ihres Treffgeradenpaares) (pg. 68)

$$(11) \quad p_{01}\lambda^4 + 2p_{02}\lambda^3\mu + (3p_{03} + p_{12})\lambda^2\mu^2 + 2p_{13}\lambda\mu^3 + p_{23}\mu^4$$

mithin ist die gesuchte Regelschaar die den drei linearen Complexen

$$(12) \quad p_{01} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad 3p_{03} + p_{12} = 0$$

gemeinsame (gehört also der Congruenz des Tangentenpaares 0, ∞ an, wie es sein muss).

Nun ist die eine Regelschaar der Fläche zweiter Ordnung

$$(13) \quad m\,x_0\,x_3 - x_1\,x_2 = 0$$

(wo m ein noch unbestimmter Coefficient) gegeben durch:

$$(14) \quad \begin{cases} m\,x_0 + k\,x_1 = 0 \\ x_2 + k\,x_3 = 0, \end{cases}$$

mithin sind die Axencoordinaten einer Geraden der Schaar:

$$(15) \quad q_{01} = q_{23} = 0,\ \rho q_{02} = m,\ \rho q_{03} = mk,\ \rho q_{12} = k,\ \rho q_{13} = k^2.$$

Auch diese Schaar gehört der Congruenz des Tangentenpaares 0, ∞ ($p_{01} = p_{23} = 0$) an: soll sie auch noch dem Complex

$$(16) \quad 3p_{03} + p_{12} = 0 - 3q_{12} + q_{03}$$

angehören, so erfordert dies die Bedingung:

$$(17)\quad m + 3 = 0 \quad \text{d. h.}$$

($\varkappa_1$) „Die einem Tangentenpaare 0, ∞ der Normcurve in obiger Weise zugehörige Regelschaar zweiter Ordnung ist die eine Schaar der Fläche zweiter Ordnung:

$$(18)\quad 3x_0\,x_3 + x_1\,x_2 = 0\text{“}.$$

Die Schnittpunkte einer jeden Fläche des Büschels (13) mit der Curve, sowie auch ihre mit der Curve gemeinsamen Ebenen sind durch

$$(19)\quad \lambda^3\,\mu^3 = 0$$

gegeben.

Für unsere spezielle Fläche des Büschels folgt dies aus dem Satze Nr. 44; man sieht aber, dass sie in diesem besonderen Falle durch die Forderung, die Schmiegungsebenen der Curve in ihren Schnittpunkten mit der Fläche seien zugleich Tangentialebenen der Fläche, noch nicht bestimmt ist.

Inwiefern kann man nun unsere spezielle Fläche des Büschels noch auf andere*) Weise, namentlich in Bezug auf den Nullcomplex der Curve, als invariante charakterisiren?

Aus den Gleichungen (15) ist sofort ersichtlich, dass unter allen Regelschaaren (14) diejenige, die einem linearen Complex

---

*) Da das Flächenbüschel [cf. (27)] (13) dem Complexbüschel $mp_{03} + p_{12} = 0$ eindeutig zugeordnet ist, dieses aber wieder dem Kegelschnittbüschel der Ebene, das den Normkegelschnitt in den beiden Punkten 0, ∞ berührt, und ferner $3\,p_{03} + p_{12}$ der symmetrischen Funktion s_2 proportional ist, so erkennt man sofort (cf. übrigens §. 20), dass der Fläche $3x_0\,x_3 + x_1\,x_2 = 0$ resp. dem Complex $3p_{03} + p_{12} = 0$ derjenige Kegelschnitt des Büschels in der Ebene entspricht, der den Normkegelschnitt trägt. Daraus folgt aber nach Nr. 59 für den Complex $3p_{03} + p_{12} = 0$ die Eigenschaft, dass, wenn irgend eine Sehne der Curve ihm angehört, dies für die zugehörige Axe der Curve gleichfalls gilt.

$$(20)\quad \eta\, p_{03} + p_{12} = 0$$

(wo η beliebig) angehört, durch

$$(21)\quad m + \eta = 0$$

bestimmt ist und umgekehrt.

Mithin ist diejenige Fläche des Büschels (13), deren Regelschaar (14) dem Nullcomplex der Curve

$$(22)\quad 3p_{03} - p_{12} = 0$$

angehört (d. h. für die jede Gerade dieser Schaar in Bezug auf den Nullcomplex sich selber conjugirt ist), gegeben durch die Gleichung:

$$(23)\quad 3x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0.$$

Zunächst springt daher in die Augen der Satz:

($\varkappa_2$) „Die durch die Bedingung (22) characterisirte Fläche zweiter Ordnung (23) (des Büschels (13)) liegt zu der durch die Bedingung (16) bestimmten harmonisch in Bezug auf die beiden Ebenenpaare

$$(24)\ x_0 = 0,\ x_3 = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = 0.\text{“}$$

Schreibt man ferner die Fläche (13) in Ebenencoordinaten, so ergiebt sich leicht:

$$(13')\quad u_0\, u_3 - mu_1\, u_2 = 0.$$

Mithin ist diejenige Fläche des Büschels (13), die diese letztere (bei fest gedachtem m) trägt, keine andere als

$$(25)\quad mx_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0.$$

Daher sind im Büschel (13) immer zwei zu den Ebenenpaaren (24) harmonische Flächen

$$(26)\quad mx_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0;\quad mx_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0$$

solche, die sich gegenseitig stützen (oder auch: aufeinander ruhen).

Speziell also hat man:

($\varkappa_3$) „Die beiden ausgezeichneten Flächen des

Büschels (13), nemlich (18) und (23) tragen sich gegenseitig."

64. Den Zusammenhang zwischen den beiden Flächen (26) [resp. speziell (18) und (23)] kann man noch weiter verfolgen, wenn man das dem Gleichungssystem (15) analoge aufstellt, das der anderen Regelschaar einer Fläche (13) zugehört.

Dies ist zunächst gegeben durch:

$$(14') \quad \begin{cases} mx_0 + k' x_1 = 0 \\ x_2 + k' x_3 = 0 \end{cases}$$

mithin die Axencoordinaten einer Geraden der Schaar:

$$(15') \; q_{02} = q_{31} = 0, \; q_{01} = m, \; q_{23} = k'^2, \; q_{03} = mk', \; q_{12} = -k'.$$

Daher gehört diese Regelschaar einer Fläche (13) auch dem linearen Complexe an (ausser den beiden $q_{02} = q_{31} = 0$):

$$(27) \quad p_{12} + mp_{03} = 0$$

während die andere Schaar (15) dem anderen Complexe: (ausser den beiden $p_{01} = p_{23} = 0$):

$$(28) \quad p_{12} - mp_{03} = 0.$$

$p_{12} = 0$ resp. $p_{03} = 0$ selbst stellen die beiden speziellen Complexe des ganzen Büschels (27) oder (28) (bei variablem m) dar, deren Axen die Curven-Sehne resp. Curven-Axe mit den Argumenten 0, ∞ sind; ebenso $p_{02} = 0$ resp. $p_{13} = 0$ die beiden speziellen Complexe, deren Axen die Geraden sind, die durch den Punkt 0 (∞) der Curve gehen, in der Ebene 0 (∞) der Curve liegen und die Tangente ∞ (0) treffen.

Endlich sind $p_{01} = 0$, $p_{23} = 0$ die speziellen Complexe der beiden Tangenten 0, ∞ selbst. Demnach gelten von der durch irgend ein Tangentenpaar einer cubischen Raumcurve durch die Bedingung des Satzes (ι_2) bestimmten zur Curve invarianten Regelschaar zweiter Ordnung folgende Eigenschaften, zu deren Darlegung wir etwas weiter ausholen müssen:

„Die zu einem Tangentenpaare α, β der Curve gehörige Sehne und Axe (s, σ) bilden ein zweites Geradenpaar, sowie die beiden Geraden, die durch den Punkt α resp. β der Curve gehen, in der Ebene α resp. β der Curve liegen und die Tangente β resp. α treffen ein drittes Paar (a, b).

Diese drei Geradenpaare α, β; s, σ; a, b sind die drei Gegenkantenpaare eines Tetraeders, dessen Ebenen einmal die beiden Ebenen α, β der Curve, sodann die beiden Ebenen durch die Tangenten α, β sind, die bezüglich durch die Punkte β, α gehen (desselben Tetraeders, das als Coordinatentetraeder (Nr. 30) diente, um die cubische Curve zur Normcurve zu machen).

Jedes der drei Gegenkantenpaare bildet die Direktricen einer Congruenz, die allen linearen Complexen eines Büschels gemeinsam ist (dessen zwei spezielle Complexe eben die beiden Geraden des bezüglichen Paares zu Axen haben). Diese Complexbüschel bezeichnen wir einfach mit

$$(29)\ [\alpha, \beta]; \quad [s, \sigma]; \quad [a, b].$$

Insbesondere gehört dem Büschel $[s, \sigma]$ (d. i. dem Büschel von linearen Complexen, die alle mit der Curve dieselben zwei zusammenfallenden Tangentenpaare (α, β) gemein haben) der Nullcomplex N der Curve an.

Dann giebt es im Büschel einen weiteren zum Nullcomplexe in Bezug auf das Paar der speziellen Complexe harmonischen Complex N'.

Die Regelschaar (zweiter Ordnung), die irgend drei linearen Complexen c_1, c_2, c_3 gemeinsam ist, sei als Regelschaar (c_1, c_2, c_3) bezeichnet.

(λ_1) „Dann gehören sowohl die beiden Regelschaaren

$$(30) \begin{cases} (a, b, N), \ (\alpha, \beta\ N') \ \textit{demselben}\ \text{Hyperboloid}\ (H), \text{als} \\ (a, b, N'), \ (\alpha, \beta, N) \ \textit{demselben}\ \text{Hyperboloid}\ (H')\ \text{an.} \end{cases}$$

Beide Hyperboloide gehören dem Büschel

von Flächen zweiter Ordnung an, deren Durchschnittscurve aus den Geradenpaaren (a, b) (α, β) besteht, und sind harmonisch zum Paar der Ebenenpaare des Büschels (Satz $\varkappa_2$) und tragen sich (ruhen aufeinander) gegenseitig (Satz $\varkappa_3$).

Die Regelschaar (α, β, N') des Hyperboloides (H) ist der Ort der Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel der Involution (cf. ι_2).

$$(31)\quad (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\left\{(\lambda-\alpha)^2+\varkappa(\lambda-\beta)^2\right\}^\alpha$$

65. Dieser Satz bedarf noch verschiedener Ergänzungen.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass auch die Regelschaar (a, b, N') des zweiten Hyperboloid's (H') der Ort der Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung ist und zwar der Involution:

$$(32)\quad (\lambda-\alpha)^4+\varkappa'(\lambda-\beta)^4.$$

In der That sind ja in der canonischen Form (cf. (15') (28)) die Complexe a, b, N' dargestellt durch:

$$(33)\quad p_{02}=0,\ p_{31}=0,\ 3p_{03}+p_{12}=0,$$

mithin ist die Darstellungsform (11) einer Geraden der gemeinsamen Regelschaar dieser drei Complexe in der That die Form (32), deren Funktionaldeterminante $(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\beta)^3$ identisch mit der der Involution (31) ist, was auch schon daraus erhellt, dass alle Flächen des Büschels (H) (H') (13) mit der Curve die Punkte und Ebenen α, β je dreimal gerechnet, gemein haben. Also hat man als erste Ergänzung zum letzten Satze:

(λ_2) „Die Regelschaar (a, b, N') des Hyperboloides (H') ist der Ort der Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel der Involution

$$(32)\ (\lambda-\alpha)^4+k'(\lambda-\beta)^4$$

d. h. aller Quadrupel, die aus zwei *zu einander*

harmonischen Paaren der gewöhnlichen Involution

$$(34)\ (\lambda - \alpha)^2 + k\,(\lambda - \beta)^2$$

bestehen.

Beide Involutionen (31) (32) haben dieselben Doppelelemente

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha.\ \beta,\ \beta,\ \beta.\text{“}$$

66. Nun kann man aber auch umgekehrt zeigen, dass diese beiden Involutionen (31) (32) die einzigen sind, die gerade diese Doppelelemente besitzen (während es doch, wie sich später ergeben wird, im Allgemeinen fünf Involutionen vierter Ordnung mit denselben sechs Doppelelementen giebt).

Den Beweis führt man, wie folgt. Wir legen wieder das canonische Argumentenpaar 0, ∞ der Normcurve zu Grunde. Einer jeden Involution vierter Ordnung mit den Doppelelementen 0, 0, 0, ∞, ∞, ∞ auf der Normcurve entspräche nach dem Satze Nro. 44 eine Fläche zweiter Ordnung, die eben diese sechs Punkte und Ebenen mit der Curve gemein hätte, so dass die beiden Tangenten 0, ∞ der Curve ganz auf ihr liegen müssten. Solcher Flächen zweiter Ordnung aber, die durch die sechs Punkte 0, 0, 0, ∞, ∞, ∞ so gehen, dass sie zugleich die beiden Tangenten ganz enthalten, giebt es ein Büschel *)

$$(13)\ m\,x_0\,x_3 + x_1\,x_2 = 0.$$

*) Man sieht dies auch schrittweise so ein. Die ganze (dreifach unendliche) Schaar der Flächen durch die angegebenen sechs Punkte ist folgende:

$$k_1 x_0 x_3 + k_2 x_1 x_2 + k_3 (9 x_0 x_3 - x_1 x_2) + k_4 (3 x_0 x_2 - x_1^2) + k_5 (3 x_1 x_3 - x_2^2) = 0$$

oder etwas anders geschrieben:

$$k\, x_0\, x_3 + \lambda\, x_1\, x_2 + \mu\, (3\, x_0\, x_2 - x_1^2) + \nu\, (3\, x_1\, x_3 - x_2^2) = 0.$$

Soll nun eine solche Fläche auch noch die Tangenten 0. ∞ ganz enthalten, so müssen die Coefficienten von x_1^2, x_2^2, d. h. μ, ν verschwinden, was zu (13) führt.

Dies erfüllt dann aber auch die übrigen verlangten Eigenschaften. Greifen wir irgend eine der Flächen (13) heraus, so gehört ihre eine Regelschaar, sagen wir R_I den Complexen (cf. (15)) an:

$$(35)\ p_{01} = 0,\ p_{23} = 0$$

Dagegen die andere, R_{II}, den beiden Complexen (cf. (15'))

$$(36)\ p_{02} = 0\ \ p_{31} = 0.$$

Soll daher R_I der Ort der Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung sein, so muss diese die Gestalt haben (wegen der Darstellungsform (11))

$$(37)\ (a_1\lambda^3\mu + a_2\lambda^2\mu^2 + a_2\lambda\mu^3) + k(b_1\lambda^3\mu + b_2\lambda^2\mu^2 + b_3\lambda\mu^3) = 0;$$

n gleicher Weise die zu einer R_{II} (irgend einer Fläche des Büschels (13)) gehörige Involution:

$$(38)\ (\alpha_0\lambda^4 + \alpha_2\lambda^2\mu^2 + \alpha_4\mu^4) + k'(\beta_0\lambda^4 + \beta_2\lambda^2\mu^2 + \beta_4\mu^4).$$

Bezeichnen wir für den Augenblick mit p_{ik}, q_{lm} die Grössen

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_l & \beta_m \end{vmatrix}$$

und mit m_{ik}, μ_{lm} gewisse Zahlenfaktoren, so ist die Funktionaldeterminante der ersten Involution (37) von der Form (wie man unmittelbar durch Ausrechnung ersieht):

$$(37')\ W_1 = \lambda^4\mu^2 m_{12} p_{12} + \lambda^3\mu^3 m_{13} p_{13} + \lambda^2\mu^4 m_{23} p_{23}$$

und die der zweiten Involution (38)

$$(38')\ W_2 = \lambda^5\mu\,\mu_{02} q_{02} + \lambda^3\mu^3\mu_{04} q_{04} + \lambda\mu^5\mu_{24} q_{24}.$$

Da sich beide Formen W_1, W_2 aber nach Voraussetzung auf $\lambda^3\mu^3$ reduciren müssen, so sind dazu die Relationen erforderlich:

$$(39)\ p_{12} = 0,\ \ p_{23} = 0,$$
$$(40)\ q_{02} = 0,\ \ q_{24} = 0.$$

Nun können aber die Gleichungen (39) nur so bestehen, dass entweder auch $p_{02} = 0$ oder $a_2 = b_2 = 0$; und analog

die Gleichungen (40), dass entweder auch $q_{02} = 0$ oder $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ wird.

Im ersten Fall, wenn auch noch p_{02} resp. q_{02} verschwinden, hat die bezügliche Involution unendlich viele Doppelelemente, hat also mit unserer Aufgabe nichts zu thun: die andere Bedingung liefert aber die beiden Involutionen (31) (32).

q. e. d. *)

---

*) Einen zweiten noch direkteren, wenn auch umständlicheren Beweis kann man so geben.

Die Geraden der Regelschaar R_I irgend einer Fläche des Büschels (13), das wir jetzt lieber in der Form schreiben wollen

$$(41)\quad 3\, n\, x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0$$

gehören nach (15) ausser den Complexen (35) $p_{01} = 0$, $p_{23} = 0$ noch dem dritten:

$$(42)\quad 3\, n\, p_{03} - p_{12} = 0$$

an. Für welchen Werth von n bilden die zugehörigen Darstellungsformen (11) eine Involution?

Nun ist nach pg. 69 (wenn man den hier unwesentlichen Proportionalitätsfaktor $= 1$ setzt)

$$(43)\quad \begin{cases} 3\, p_{03} = \dfrac{s_2 \mp \sqrt{6i}}{2}\,. \\ p_{12} = \dfrac{s_2 \pm \sqrt{6i}}{2} \end{cases}$$

also $3\, n\, p_{03} - p_{12} = s_2\,(n - 1) \pm \sqrt{6i}\,(n + 1) = 0$ oder

(44) $s_2^2 \begin{Bmatrix} n-1 \\ n+1 \end{Bmatrix}^2 - 6i = 0$ oder wegen (35), wenn man die Darstellungsform (11) jetzt so schreibt

$$(45)\quad 4a_1\lambda^3\mu + 6a_2\lambda^2\mu^2 + 4a_3\lambda\mu^3$$

$$(46)\quad 3\, a_2^2\, n - (n + 1)^2\, a_1\, a_3 = 0$$

Somit kann man setzen

$$(47)\quad a_1 = 1, \quad a_2 = r\, k, \quad a_3 = k^2$$

wo k variabel, r aber in bestimmter Weise von n abhängt. Daher wird die Darstellungsform:

$$(48)\quad \lambda\, \mu\, (\lambda^2 + r\, k\, \lambda\, \mu + k^2\, \mu^2)$$

nur dann eine Involution bilden, wenn $r = 0$ d. h. $a_2 = 0$ ist. Dann

Wie vielfach die beiden Involutionen (31) (32) gerechnet werden müssen, um die fünf Lösungen, die dieselbe Frage im allgemeinen zulässt, zu ergeben, mag hier unerörtert bleiben.

Wir können also jetzt auch so sagen:

(λ_3) „Die beiden einzigen Involutionen vierter Ordnung, deren Funktionaldeterminante der Cubus einer quadratischen Form $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ ist, erzeugen, als Tangenteninvolutionen aufgefasst, mittelst ihrer Treffgeradenpaare, gerade die eine Regelschaar (R_{I} resp. R_{II}) der beiden Hyperboloide (H) resp. (H') der Sätze (λ_1) (λ_2)."

67. Wir nennen daher, der Unterscheidung halber, die zu irgend einem Tangentenpaare α, β einer cubischen Curve gehörigen Flächen (H) (H') „die *Doppelflächen* (α, β) (zweiter Ordnung) *erster, resp. zweiter Art*".

Dann können wir den Satz ι_2 jetzt so fassen:

(ι_3) „Es giebt drei (und nur drei) Dupelflächen erster Art, deren eine Regelschaar dem Complexe $a_s = 0$ angehört.

---

muss $(n+1)^2$ verschwinden d. h. es ist $n = -1$ und wir gelangen so zu unserer Fläche

$$(18)\ 3\, x_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0.$$

Genau in derselben Weise gelangen wir, wenn die Geraden der Regelschaar R_{II} (15') einer Involution zugehören sollen, zur Gleichung:

$$(49)\ 3\, a_2^2 . 4\, n - (n-1)^2\, a_0\, a_4 = 0$$

die sich auf $a_2 = 0$ reduciren muss, was nur für $n = 1$ geschieht, d. h. wir erhalten die Fläche

$$(23)\ 3\, x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0.$$

Die Regelschaaren R_{II} resp. R_{I} der Flächen (18) (23) bilden, wie man sich leicht überzeugt, die Treffgeraden von zwei Quadrupelschaaren der Form

$$(50)\ f + k\, f_1 + k^2\, f_2$$

die uns hier nicht weiter interessiren.

Sind diese die Flächen $(\varepsilon_i \eta_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, so sind die drei Paare $\varepsilon_i\, \eta_i$ die Wurzeln der Covariante Θ der Form a_λ."

Da wir andererseits aus Früherem (pg. 102) wissen, dass unter den zu a_λ apolaren Quadrupeln sich nur vier vierfache Potenzen $(\lambda - \alpha_i)^4$ befinden (wo die α_i die Wurzeln von a_λ sind), und diese sich zu sechs Involutionen combiniren, so haben wir als Seitenstück zum letzten Satze:

(ι_4) „**Es giebt sechs (und nur sechs) Dupelflächen zweiter Art, deren eine Regelschaar dem Complexe $a_s = 0$ angehört. Sind diese die Flächen $(\alpha_i\; \alpha_k)$ so sind α_i, α_k, α_l, α_m die vier Wurzeln der Form a_λ."**

Wir verlassen damit die Betrachtung der Covarianten einer biquadratischen binären Form auf der cubischen Raumcurve und wenden uns der allgemeineren Aufgabe zu, die beiden Theorien des Normkegelschnitts und der cubischen Normcurve gegenseitig in einander überzuführen, wie es schon pg. 62 in Aussicht gestellt war.

§. 20.

Das Verbindungsgebiet zwischen Normkegelschnitt und cubischer Normcurve.

68. Schon in Nro. 43 war der Satz abgeleitet, dass die Gleichung eines Kegelschnitts in der Ebene, in homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2 geschrieben (wobei von irgend einem Punkt x der Ebene das Tangentenpaar α, β an den Normkegelschnitt geht, dessen Argumente durch

$$\frac{x_1}{x_0} = \alpha + \beta, \quad \frac{x_2}{x_0} = \alpha\beta$$

bestimmt sind) zugleich alle Sehnen α, β der cubischen Norm-

curve darstellt, die einem ganz bestimmten (allgemeinen) linearen Complex angehören, und damit auch den Complex selbst; und umgekehrt.

Dadurch wird es ohne Mühe ermöglicht, eine vollständige Abbildung der Complextheorie auf die Kegelschnittstheorie durchzuführen.

Da eine solche Durchführung aus dem Rahmen unserer Untersuchung zu sehr heraustreten würde, so mag es genügen, auf einige Hauptpunkte aufmerksam zu machen.

69. Wir knüpfen der Einfachheit wegen an die letzten Erörterungen des letzten Paragraphen an, die sich auf die Eigenschaften des Complexbüschels

$$(1)\ 3\,n\,p_{03} + p_{12} = 0$$

stützten, dessen gemeinsame Congruenz zu Directricen die Sehne und Axe $(0, \infty)$ der Normcurve besass und dessen Individuen alle mit der Curve die vier Tangenten $0, 0, \infty, \infty$ gemein hatten.

Wir suchen die einem Complexe (1) angehörigen Sehnen (Axen) der Curve d. h. den ihm entsprechenden Kegelschnitt der Ebene.

Aus der Darstellungsform einer Raumgeraden (mittelst der sie treffenden Tangenten der Curve) (11)

$$(2)\ p_{01}\,\lambda^4 - 2\,p_{02}\,\lambda^3 + (3\,p_{03} + p_{12})\,\lambda^2 - 2\,p_{13}\,\lambda + p_{23} = 0$$

folgte (pg. 69):

$$(3)\ \rho\,.\,3\,p_{03} = \frac{s_2 \pm \sqrt{6i}}{2}, \quad \rho p_{12} = \frac{s_2 \mp \sqrt{6i}}{2}.$$

Dies hat zunächst zur Folge:

$$(4)\ p_{03}\,p_{12} = 0 \equiv s_2^2 - 6i = s_2^2 - (12\,s_0\,s_4 - 3\,s_1\,s_3 + s_2^2)$$
$$= 3(-4\,s_0\,s_4 + s_1\,s_3).$$

Seien die vier Argumente (Wurzeln von (2)), aus denen sich die s_i zusammensetzen: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so stellt (2) eine Sehne resp. Axe der Curve dar, wenn $\alpha = \beta = \lambda_1$; $\gamma = \delta = \lambda_2$.

Wird dann

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$$

gesetzt, so geht Gleichung (4) über in *):

$$(5) \; \sigma_2\sigma_0 (\sigma_2 \sigma_0 - \sigma_1^2) = 0.$$

Da die Sehnen in die Axen durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} übergehen, so stellt das Kegelschnittpaar (5) die Sehnen und Axen der beiden (speciellen) Complexe

$$(6) \; p_{03} = 0, \; p_{12} = 0$$

dar. Es ist aber leicht, beide Kegelschnitte in der Weise zu trennen, dass jeder nur einem der Complexe (6) entspricht und umgekehrt; man braucht nur zu bemerken, dass die Sehne $(0, \infty)$ nur dem Complexe $p_{12} = 0$ allein, und ebenso, dass die Axe $(0, \infty)$ nur dem Complexe $p_{03} = 0$ allein angehört.

Andrerseits haben wir damals (Nro. 32) festgesetzt, dass die Punkte der Ebene (also die Tangentenpaare des Normkegelschnitts) den Sehnen der cubischen Normcurve entsprechend gesetzt werden sollen.

Mithin kann das Tangentenpaar $\sigma_2\sigma_0 = 0$, da sein Schnittpunkt der Sehne $0, \infty$ entspricht, vermöge seiner Punkte nur den Sehnen des Complexes $p_{12} = 0$ entsprechen. Daraus folgt sofort:

α) „Die Punkte des Kegelschnitts „$\sigma_0 = 0, \sigma_2 = 0$" entsprechen sowohl den Sehnen des Complexes $p_{12} = 0$, als den Axen des Complexes $p_{03} = 0$; reciprok die Punkte des Kegelschnitts $\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2 = 0$ sowohl den Axen des ersten, als den Sehnen des zweiten Complexes."

*) Die beiden Kegelschnitte (5) $\sigma_2\sigma_0 = 0$ und $\sigma_2\sigma_0 - \sigma_1^2 = 0$ sind dann zugleich die beiden den Normkegelschnitt in zwei Punkten $(0, \infty)$ berührenden Kegelschnitte, denen unendlich viel Dreiecke ein- und umbeschrieben sind.

70. Wir wissen ferner von früher (pg. 119), dass der Nullcomplex $3\,p_{03} - p_{12} = 0$ (vermöge seiner Sehnen) dem Normkegelschnitt $4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 = 0$ entspricht, sowie der zu ihm (in Bezug auf das Paar (6)) harmonische Complex $3\,p_{03} + p_{12} = 0$ dem den Normkegelschnitt tragenden Kegelschnitt des Büschels $\sigma_0\,\sigma_2 - k\,\sigma_1^2 = 0$ d. h. dem Kegelschnitt $2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0$.

In der That folgt dies auch sogleich aus den Formeln (2). Denn es ergiebt sich

(7) $3p_{03} + p_{12} = 0 \equiv s_2, \quad 3p_{03} - p_{12} = 0 \equiv i \equiv 12 s_0 s_4 - 3 s_1 s_3 + s_2^2$

mithin für die zugehörigen Sehnen:

$$(8)\ 2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0, \qquad (4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2)^2 = 0$$

Versteht man daher unter den p_{ik} die Liniencoordinaten einer Sehne (der cubischen Curve) so kann man setzen:

$$(9) \begin{cases} \rho\,p_{12} = \lambda\,\sigma_0\,\sigma_2 \\ 3\,\rho\,p_{03} = \sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 \end{cases}$$

wo λ dadurch zu bestimmen ist, dass

$$(10) \begin{cases} 3\,p_{03} - p_{12} = 0 \text{ übergeht in } 4\,\sigma_2\,\sigma_0 - \sigma_1^2 = 0 \text{ und} \\ 3\,p_{03} + p_{12} = 0 \quad \text{„} \quad \text{„}\ 2\,\sigma_2\,\sigma_0 + \sigma_1^2 = 0. \end{cases}$$

Dies leistet aber nur der Werth $\lambda = -3$, so dass wir haben:

$$(11)\ \rho\,p_{12} = -3\,\sigma_0\,\sigma_2, \qquad 3\,\rho\,p_{03} = \sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2.$$

Es hätte dies auch unmittelbar aus der Gleichung (32) Nro. 42, in Vergleichung mit der Gleichung eines allgemeinen linearen Complexes (33) gefolgert werden können.

Daraus ergiebt sich denn sofort wieder, dass irgend ein Complex

$$(1)\ 3\,n\,p_{03} + p_{12} = 0$$

übergeht in:

$$(12)\ \sigma_0\,\sigma_2\,(n - 3) - n\,\sigma_1^2 = 0$$

und (bei Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} oder, was dasselbe ist, von n mit $\frac{1}{n}$) der Complex

$$(1)' \; 3\, p_{03} + n\, p_{12} = 0 \text{ über in}$$

$$(12)' \; \sigma_0\, \sigma_2\, (1 - 3\, n) - \sigma_1^2 = 0.$$

Diese Resultate mögen in dem Satze niedergelegt werden:

β) „Die Punkte des Kegelschnitts H

$$(12) \; \sigma_0\, \sigma_2\, (n - 3) - n\, \sigma_1^2$$

des Büschels $\sigma_0\, \sigma_2 - k\, \sigma_1^2 = 0$ repräsentiren sowohl die Sehnen des Complexes

$$(1) \; 3\, n\, p_{03} + p_{12} = 0$$

des Büschels $p_{03} - k'\, p_{12} = 0$, als die Axen des Complexes

$$(1)' \; 3\, p_{03} + n\, p_{12} = 0$$

desselben Büschels und reciprok die Punkte des Kegelschnitts

$$(12)' \; \sigma_0\, \sigma_2\, (1 - 3\, n) - \sigma_1^2 = 0$$

den Sehnen des Complexes (1)' und den Axen des andern (1).

Die einander so zugehörigen Complexe (1) (1)' resp. Kegelschnitte (12) (12)' bilden eine (gewöhnliche) Involution, deren Doppelelemente ($n = \pm 1$) die Complexe

$$(7) \; 3\, p_{03} \pm p_{12} = 0$$

resp. die Kegelschnitte sind

$$(10) \; N \equiv 4\, \sigma_2\, \sigma_0 - \sigma_1^2 = 0, \quad f \equiv 2\, \sigma_2\, \sigma_0 + \sigma_1^2 = 0$$

(wo f den Normkegelschnitt N trägt)."

In der That sind ja die Complexe (7) unseres **Büschels** die einzigen, die bei Vertauschung von $3\, p_{03}$ mit p_{12} in sich übergehen.

71. Der Beweis dieses Satzes möge nach rechnerischer Seite hin durch die direkte Umformung der Complexgleichung (1) in (12) mit Hülfe der Beziehungen (3) ergänzt werden.

Wir erhalten:

(13) $3\,n\,p_{03} + p_{12} \equiv s_2\,(n+1) \pm \sqrt{6i}\,(n-1) = 0$ oder:

$s_2^2\,(n+1)^2 - (n-1)^2\,\{12\,s_0\,s_4 - 3\,s_1\,s_3 + s_2^2\}$ oder:

$4\,n\,s_2^2 - 12\,(n-1)^2\,s_0\,s_4 + 3\,(n-1)^2\,s_1\,s_3 = 0,$

mithin durch Uebergang der s in die σ

(14) $\sigma_2^2\sigma_0^2\{4n - 3(n-1)^2\} + \sigma_1^2\sigma_2\sigma_0\{4n + 3(n-1)^2\} + n\sigma_1^4 = 0.$

Dies ist aber nichts anderes als:

(15) $[\sigma_2\,\sigma_0\,(1-3\,n) - \sigma_1^2]\,[\sigma_0\,\sigma_2\,(n-3) - n\,\sigma_1^2] = 0$

d. h. das Produkt der Gleichungen (12)′ (12). In der That ändert sich ja (13) bei Vertauschung von n mit $\frac{1}{n}$ nicht.

In welcher Weise aber dann die beiden Faktoren der Gleichung (15) den beiden zugehörigen Complexen einzeln entsprechen, erhellt aus irgend einem speciellen Werth von n, z. B. $n = 0$ (cf. Satz α).

Für $n = 3$ erhalten wir den ausgezeichneten Kegelschnitt

(16) $\sigma_1^2 = 0$

dem also der Complex

(17) $9p_{03} + p_{12} = 0$

entspricht. Dessen Sehnen waren aber gerade die Geraden der einen Regelschaar der Fläche

(18) $9x_0\,x_3 - x_1\,x_2 = 0$

die bekanntlich ganz durch die cubische Curve hindurchgeht.

In der That stimmt dies überein mit dem Ergebnisse der pg. 56, wonach die Punkte einer Geraden ($\sigma_1 = 0$) die Sehnen einer durch die Curve gehenden Fläche zweiter Ordnung repräsentiren.

Der zu (19) in Bezug auf das Paar (6) harmonische Complex entspricht dem Kegelschnitt

(19) $2\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 = 0.$

Dies ergiebt aber in Verbindung mit dem Kegelschnitt (8)

(20) $2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0:$

γ) „Die beiden Complexe $9p_{03} \pm p_{12} = 0$ sind dadurch ausgezeichnet, dass sie einmal harmonisch sind zum Paar (6)

$$(6)\ p_{03} = 0,\ p_{12} = 0;$$

andererseits ist aber auch das Paar

$$(21)\ p_{12} = 0,\ 9p_{03} + p_{12} = 0$$

harmonisch zu dem andern:

$$(22)\ 3\,p_{03} + p_{12} = 0,\ 9p_{03} - p_{12} = 0;$$

und ebenso (durch Vertauschung von p_{12} mit $-p_{12}$): das Paar

$$(23)\ p_{12} = 0,\ 9p_{03} - p_{12} = 0$$

ist harmonisch zum Paare:

$$(24)\ 3\,p_{03} - p_{12} = 0,\ 9p_{03} + p_{12} = 0.\text{“}$$

72. Kehren wir jetzt zurück zum Hauptsatze β, so können wir ihn sofort für irgend ein Complexbüschel, dessen gemeinsame Congruenzdirektricen in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve conjugirt sind, d. h. ein solches, dessen Complexe alle mit der Curve dieselben vier Tangenten

$$(25)\ a_\lambda^4 = 0$$

gemein haben, erweitern. Nach pg. 77 liess sich dieses Büschel in die Form bringen:

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

das durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} übergeht in

$$(27)\ a_s\ - k(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

$a_s = 0$ entsprach demjenigen Kegelschnitt a_σ^2 des Büschels, dessen Grundpunkte auf dem Normkegelschnitte liegen und durch (25) dargestellt sind, und der den Normkegelschnitt trägt d. h. es ist der Complex des Büschels (26) für den die ihm angehörigen Sehnen und Axen der cubischen Curve dieselben Argumentenpaare besitzen (d. h. die im Nullcomplex einander conjugirt sind). Nennt man eine solche Sehne und Axe einfach conjugirt, so hat man:

δ) „Die Complexe des Büschels (26) bilden eine (gewöhnliche) Involution, deren Doppelelemente gegeben sind durch

$$(28)\ a_s = 0,\ \ 3\,p_{03} - p_{12} = 0.$$

Irgend ein Paar der Involution hat die Eigenschaft, dass die Sehnen (Axen) des einen Complexes des Paares *conjugirt* sind zu den Axen (Sehnen) des andern.

Die entsprechenden Kegelschnitte bilden eine Involution, deren Doppelelemente der Normkegelschnitt und der ihn tragende (und aus ihm das Punktquadrupel $a_\lambda^4 = 0$ ausschneidende) Kegelschnitt sind.

Die Punkte irgend eines Kegelschnitts des Büschels

$$(29)\ a_\sigma^2 + k\,(4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2) = 0$$

repräsentiren die Sehnen des Complexes

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

und zugleich die Axen des andern

$$(27)\ a_s - k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

Das Umgekehrte gilt von den Punkten des Kegelschnitts

$$(29)'\ a_\sigma^2 - k\,(4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2) = 0$$

der mit (29) ein Paar der angegebenen Involution bildet."

73. Ein ausgezeichnetes Paar in der Complexinvolution bilden die beiden speciellen Complexe des Büschels

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

deren Axen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels a_λ^4 sind, die ja in der That nach pg. 69 durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} d. h. von $+k$ mit $-k$ in einander übergehen.

Die beiden zugehörigen Werthe von k fallen nur zusammen, wenn die Invariante i von a_λ^4 verschwindet (cf. pg. 117) und $a_s = 0$ ist dann selbst der specielle Complex des Büschels. In der That ergiebt die Bedingung, dass (26) einen speciellen Complex vorstellt:

$$(30)\ a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 (a_2^2 - k^2) = 0 \text{ oder } k = \sqrt{\frac{i}{6}}.$$

Wir können daher Satz (δ) so vervollständigen:

δ') Der Complex $a_s = 0$ (der unter allen Complexen, die die vier Tangenten $a_\lambda^4 = 0$ mit der Curve gemein haben, dadurch ausgezeichnet ist, dass er zu sich selber conjugirt ist) ist in Bezug auf das Paar der beiden speciellen Complexe dieses Büschels

$$(31)\ a_s \pm \sqrt{\frac{i}{6}} (3 p_{03} - p_{12}) = 0$$

zum Nullcomplex der Curve *harmonisch*."

Genau dieselbe Bedingung (30) sagte aber aus (pg. 99), dass die den beiden speciellen Complexen (31) entsprechenden Kegelschnitte H_1, H_2 die waren, (die aus N_2 das Quadrupel a_λ^4 ausschneiden und) denen unendlich viele Dreiecke ein- und N_2 umbeschrieben sind. Daher lautet der zu (δ') analoge Satz der Ebene:

δ') „Ist ein Kegelschnittbüschel gegeben $f + k\varphi = 0$, und trägt f den Kegelschnitt φ, so ist das Paar des Büschels H_1, H_2, denen unendlich viele Dreiecke ein- und φ umbeschrieben sind, harmonisch zum Paare f, φ."

74. Dieses Entsprechen der speciellen Complexe und der Kegelschnitte H möge noch des Näheren erörtert werden, da sie das nothwendigste Vehikel bei der Durchführung der Verwandtschaft beider Theorien sein müsste.

Wir wollen zu dem Zweck umgekehrt von den Kegelschnitten H (bei gegebenem N_2) ausgehen: wir denken uns also irgend einen solchen und ein Dreieck, das ihm und N_2 umbeschrieben ist, dessen Seiten also durch drei Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmt sind. Dann repräsentiren die drei Eckpunkte dieses Dreiecks $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_1 \lambda_3)$ $(\lambda_2 \lambda_3)$ drei in einer Ebene liegende Sehnen der Normcurve. Drei solche Sehnen können aber einem allgemeinen linearen Complexe nie angehören (da sie ja sonst, weil in einer Ebene befindlich, durch einen Punkt gehen müssten), sondern nur, wie bekannt, einem speciellen, dessen Axe dann in der Ebene der drei Sehnen liegen muss. (Dann gehört aber auch jede Gerade jeder durch die Axe gehenden Ebene dem Complexe an, d. h. dann giebt es unendlich viele Dreiecke, die N_2 um- und H einbeschrieben sind.) Da nun jeder Kegelschnitt, der durch die Ecken irgend eines N_2 umschriebenen Dreiecks geht, ein Kegelschnitt H ist, so folgt:

ε) „Den speciellen linearen Complexen H im Raume entsprechen bei unserer Abbildung auf die Ebene die Kegelschnitte H und umgekehrt, und zwar ist das (Argumenten-) Quadrupel *H* der Schnittpunkte von H mit dem Normkegelschnitt identisch mit dem Quadrupel der Tangenten der cubischen Normcurve, die die Axe des Complexes treffen."

75. Zu jedem Kegelschnitt H gehörte aber ein „conjugirter" Kegelschnitt H', der gleichfalls mit N_2 die Punkte *H* gemein hat und mit H harmonisch ist zum Paare N_2, f, (wo f der Kegelschnitt des Büschels H, H' ist, der N_2 trägt). Die Gleichungen von H und H' gingen durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} in einander über. Dadurch geht aber auch der Complex H in seinen conjugirten H' über (dessen Axe zur Axe

von H conjugirt ist in Bezug auf den Nullcomplex der Curve): andrerseits vertauschen sich dabei die Sehnen und Axen des Complexes H, sowie die Axen und Sehnen von H' d. h.

ε) „Die Punkte des Kegelschnitts H repräsentiren die Sehnen der cubischen Curve, die dem Complexe H angehören (d. h. seine Axe treffen), und zugleich die Axen der Curve, die dem conjugirten Complexe H' angehören: entsprechend die Punkte des zu H conjugirten Kegelschnitts H' die Curvenaxen des Complexes H, sowie die Curvensehnen des Complexes H'."

76. Von den Kegelschnitten H wissen wir nach Früherem noch Folgendes. Die H ein- und N_2 umbeschriebenen Dreiecke sind Poldreiecke eines bestimmten Kegelschnitts F, der mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein hat und N_2 trägt. Ausserdem ruht *) er noch (als Klassenkegelschnitt aufgefasst) auf dem Kegelschnitt H.

Ebenso verhält sich zum Kegelschnitt H' ein anderer, F', gerade so, wie eben F zu H. Es mag dies jetzt noch schärfer dahin betont werden:

ζ) „In der Schaar der Kegelschnitte, die mit einem festen (N_2) ein (*ganz beliebiges*) Tangentenquadrupel H gemein haben, giebt es ***ein Paar*** von solchen, die N_2 tragen. Sie seien F, F'.

Andrerseits giebt es in dem Büschel von Kegelschnitten, die mit demselben festen Kegelschnitt (N_2) das Punktquadrupel H gemein haben, ein Paar von solchen, denen unendlich viele Dreiecke ein- und N_2 umbeschrieben sind. Sie seien H, H'.

*) Es folgt dies ja auch unmittelbar daraus, dass es Poldreiecke von F giebt, die H einbeschrieben sind.

Dann sind sich H und F, bezüglich H' und *F'* eindeutig dadurch zugeordnet, dass immer der erstgenannte Kegelschnitt den zweiten *stützt*, und zugleich immer die dem ersten einbeschriebenen Dreiecke Poldreiecke des zweiten sind.

So gehört also zu *irgend einem* Kegelschnitt *F* stets ein und nur ein Kegelschnitt H *und umgekehrt*. Daher mögen auch des Weiteren zwei solche Kegelschnitte als „zusammengehörig" bezeichnet werden."

77. Die H resp. H' einbeschriebenen (und N_2 umbeschriebenen) Reihen von Dreiecken bilden auf N_2 zwei zu einander conjugirte Involutionen dritter Ordnung (cf. pg. 96), die wir noch kurz mit Rücksicht auf unsere Abbildung in's Auge fassen wollen.

Eben noch zeigte sich, dass die „H-Dreiecke" (wie sie kurz heissen mögen), sofern sie N_2 umschrieben sind, der Involution correspondiren, die die Ebenen durch die Axe des dem Kegelschnitt H entsprechenden Complexes H aus der cubischen Normcurve ausschneiden (oder kürzer: „der Ebeneninvolution der Complexaxen H").

Das Analoge gilt für Kegelschnitt- und Complex H'.

Da aber die beiden Complexaxen H, H' in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve einander conjugirt sind, so ist die „Punktinvolution" (das Dualistische zur Ebeneninvolution) der einen identisch mit der Ebeneninvolution der andern, und die „Ebeneninvolution" der ersten identisch mit der Punktinvolution der zweiten. Daher können wir dies so ausdrücken:

η) „Die beiden durch die H-, resp. H'-Dreiecke auf N_2 bestimmten Tangenteninvolutionen (dritter Ordnung) sind zugleich die beiden Ebeneninvolutionen der Complexaxen H, resp. H' und die

beiden Punktinvolutionen der Complexaxen H' resp. H."

Nun geht von jedem Punkte der Complexaxe H eine Sehne an die cubische Curve. Ist das vom Punkte an die Curve gehende Ebenentripel dargestellt durch a_λ^3, so schneidet (cf. pg. 59) die Sehne aus der Curve die zu a_λ^3 gehörige Covariante Δ aus. Andrerseits entspricht dieser Sehne ein bestimmter Punkt des Kegelschnittes H, und zwar der, von dem das Tangentenpaar Δ an den Normkegelschnitt N_2 geht. Umgekehrt entspricht jedem Punkt auf H eine Sehne der cubischen Curve, die die Complexaxe H in einem bestimmten Punkte a_λ^3 trifft. Dies ergiebt aber in Verbindung mit dem letzten Satze:

$\varkappa$) „Die durch die Involution dritter Ordnung der H-Dreiecke (auf N_2) bestimmte quadratische Schaar der zugehörigen Formen Δ führt mittelst ihrer Tangentenpaare zu den Punkten des Kegelschnitts H' (und die durch die H'-Dreiecke bestimmte Schaar der Formen Δ' zu den Punkten von H)."

78. Wir werden bald nachher (Nr. 107) den einfachen geometrischen Zusammenhang zwischen einer cubischen Form und ihrer quadratischen Covariante, wenn beide auf einem Kegelschnitt dargestellt sind, kennen lernen.

Zunächst fragen wir jetzt nach der Bedeutung des obigen Satzes über die „Zusammengehörigkeit" der Kegelschnitte H resp. H' mit F resp. F', für den Raum.

Nach pg. 112 entspricht einem Kegelschnitt F, der N_2 trägt, ein (in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve) sich selbst conjugirter linearer Complex F. Schneidet der Kegelschnitt F aus N_2 das Quadrupel f aus, so ist auch f das Tangentenquadrupel der cubischen Curve, das dem Complex F angehört (cf. pg. 111). Das N_2 und F gemeinsame Tangenten-

quadrupel H ist die Hesse'sche Covariante von f; dasjenige Tangentenquadrupel, das der zu F gehörige Kegelschnitt H mit N_2 gemein hat (cf. pg. 108), die Covariante „$2jf - 3iH$."

Für den Complex F stellt H die vier Punkte der cubischen Curve dar (cf. pg. 115), deren im Complexe ihnen zugehörige Ebenen die Curve berühren: die Berührungspunkte sind die Form „$2jf - 3iH$". Dem zu H conjugirten Kegelschnitt H′ gehört der Kegelschnitt F' zu, der aus N_2 das Quadrupel f' ausschneiden möge. Dann ist H auch die Hesse-sche Covariante von f', und auch die Invariante i ist beiden Formen f, f' gemeinsam. Daher hat der Kegelschnitt H′ mit N_2 das Tangentenquadrupel „$2j'f' - 3iH$" gemein (die Form f' nebst den sich daran anschliessenden wird weiter unten noch näher bestimmt werden).

Endlich entsprachen (cf. pg. 96) den Poldreiseiten von F, die N_2 umschrieben sind, diejenigen Regelschaaren dreier Tangenten der cubischen Curve N_3, die dem Complexe F angehören, und den Polvierseiten von F, die N_2 umschrieben sind, diejenigen Tangentenquadrupel der cubischen Curve, deren Treffgeraden den Complex F bilden. Daher kann man den Zusammenhang zwischen den Complexen F, F', H, H′ dahin formuliren:

ζ_1) „Zu irgend einem Tangentenquadrupel einer cubischen Raumcurve H, dessen Treffgeraden H, H′ seien, gehört stets ein Paar sich selbst conjugirter Complexe F, F' mit folgenden Eigenschaften.

Die vier Punkte der Curve, deren in den Complexen F, F' ihnen zugeordnete Ebenen die Curve berühren, sind beidemal dieselben und zwar die Berührungspunkte der Tangenten H.

Die Regelschaaren der mit der Ebeneninvolu-

tion H resp. H' identischen Tangenteninvolution (dritter Ordnung) gehören dem Complexe F resp. F' an.

Dadurch gehört zu jedem sich selbst conjugirten Complexe F eine bestimmte Gerade H und umgekehrt."

79. Wir fragen nunmehr nach den ebenen Bildern der Geraden eines speciellen linearen Complexes H. Diese Frage löst sich durch die andere:

Welche Beziehung herrscht zwischen zwei H-Kegelschnitten, H, H_1, wenn die Axen der ihnen entsprechenden Complexe H, H_1 sich treffen sollen?

Wenn die Geraden H, H_1 sich treffen, so haben sowohl ihre beiden Ebenen- als Punktinvolutionen je ein Tripel gemeinsam.

Demnach giebt es ein N_2 umschriebenes Dreiseit, durch dessen Ecken H, H_1 und ein zweites desgleichen, durch dessen Ecken die den letzteren conjugirten Kegelschnitte H', H'_1 gehen.

Nun giebt es im allgemeinen vier Sehnen der cubischen Curve, die irgend zwei Raumgerade treffen, entsprechend den vier Schnittpunkten der beiden H-Kegelschnitte.

Da sich in unserm Falle die beiden Raumgeraden treffen, so bestehen die vier erwähnten Sehnen aus den drei Sehnen, die in der Ebene beider Geraden liegen, nebst der einen, die durch ihren gemeinsamen Punkt geht. Dies ergiebt zufolge des Satzes (ε'):

λ) „Sollen die Axen zweier specieller Complexe H, H_1 sich treffen, so muss eines der vier Dreiecke, die man aus den Schnittpunkten der entsprechenden Kegelschnitte H, H_1 bilden kann, dem Normkegelschnitt N_2 umschrieben sein, und sei daher durch die cubische Form η_λ^3 dargestellt.

Das Gleiche gilt dann von den beiden conjugirten Kegelschnitten H', H'_1.

Die bezügliche cubische Form sei η'^3_λ.

Dann sind die Punkte (cf. pg. 59) der Tangentenpaare Δ, Δ' (wo diese Formen die quadratischen Covarianten von η^3_{λ}, η'^3_λ sind) die *vierten* Schnittpunkte der Kegelschnitte H' H'_1 resp. H, H_1."

Daraus folgt dann sofort für die Geraden eines speciellen Complexes H:

λ_1) „Den Geraden eines speziellen Complexes H entsprechen alle H-Kegelschnitte, die durch die Ecken irgend eines der dem Complexe H entsprechenden Kegelschnitte H ein- und N_2 umbeschriebenen Dreiecke hindurchgehen.

Dem Netz der Kegelschnitte, die durch die Ecken irgend eines dieser Dreiecke gehen, entspricht das Geradenfeld einer Ebene durch die Complexaxe."

Und da alle diese Dreiecke Poldreiecke des Kegelschnitts F sind, so kann man unserm Satze (cf. die Anm. pg. 138) auch die Form geben:

λ_2) „Den Geraden eines speciellen Complexes H entsprechen alle H-Kegelschnitte, die den zum Kegelschnitt H (der dem Complex entspricht) gehörigen Kegelschnitt F *tragen*.

Die Quadrupel der Schnittpunkte aller dieser H-Kegelschnitte mit dem Normkegelschnitt (N_2) sind identisch mit den Quadrupeln der Tangenten, die die Geraden des Complexes H treffen.

Speciell ist die Axe des Complexes selbst

eine Gerade desselben, also trägt der Kegelschnitt H gleichfalls *F*.

Daher erkennt man, wie dieser Satz zugleich eine Verallgemeinerung des Satzes (Nr. 76 anm.) ist.

Um die allgemeinere Frage nach den Bildern der Geraden eines ganz allgemeinen Complexes zu beantworten, legen wir zunächst den algebraischen Inhalt der Sätze „λ" auseinander. Es wird dies zugleich vorher Gelegenheit geben, die wichtigsten hierhergehörigen Formeln (die sich bis jetzt in den Paragraphen 16 bis 20 zerstreut finden) einmal übersichtlich zusammenzustellen und dann nach einigen Richtungen hin zu ergänzen.

§. 21.

Fortsetzung. Die Apolaritätsformeln für (lineare) Complexe und Kegelschnitte.

80. Wir gingen ursprünglich von der binären Form f aus:

$$(1)\quad f = a_\lambda^4 = a_0\,\lambda^4 + 4\,a_1\,\lambda^3\mu + 6\,a_2\,\lambda^2\,\mu^2 + 4\,a_3\,\lambda\mu^3 + a_4\,\mu^4.$$

Dann war die Gleichung des linearen Complexes, dem die Congruenz der beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels f (der cubischen Normcurve N_3) angehört und der in Bezug auf den Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirt ist:

$$(2)\quad a_s = a_0\,s_4 + a_1\,s_3 + a_2\,s_2 + a_3\,s_1 + a_4\,s_0 = 0.$$

Die Sehnen (und zugleich die Axen) der Curve, die diesem Complexe angehören, bilden sich auf die Ebene des Normkegelschnitts N_2 ab als die Punkte des Kegelschnitts, der N_2 trägt:

$$(3)\quad F^{*)} = a_\sigma^2 = a_0\,\sigma_2^2 + 2\,a_1\,\sigma_0\,\sigma_2 + 2\,a_3\,\sigma_1\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_0^2 + a_2\,(2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2) = 0$$

*) Es tritt von jetzt ab die Nothwendigkeit ein, die Bezeichnungen noch schärfer zu unterscheiden, als es bisher nöthig war. Dazu dienen

Dann war die Involution (dritter Ordnung) der N_2 umschriebenen Poldreiseite von f dargestellt durch:

---

zwei Prinzipien (vgl. dazu die weiteren Entwicklungen dieses Abschnitts):

a) Da unser Normkegelschnitt und unsere cubische Normcurve so gewählt sind, dass die Theorie des letztern auf die des ersteren dadurch übertragen wird, dass (cf. Nr. 32) einer Sehne $(\lambda_1 \lambda_2)$ von N_3 der Punkt der Ebene (λ_1, λ_2) (mit den Tangenten λ_1, λ_2 an N_2) entspricht, so wird der Kegelschnitt der Ebene, dessen Punkte den Sehnen eines linearen Complexes c entsprechen, gleichfalls der Kegelschnitt c genannt (oder „der Sehnenkegelschnitt des Complexes c"). Der zum Complexe c (in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve, was der Kürze wegen gewöhnlich fehlt) conjugirte Complex heisst der Complex c': ebenso der entsprechende Kegelschnitt c' der zum Kegelschnitt c conjugirte.

Dann entspricht auch der Kegelschnitt c' mittelst seiner Punkte den Axen (von N_3), die dem Complexe c angehören (heisse also: „der Axenkegelschnitt des Complexes c"). Da nun der Kegelschnitt (3) als Axenkegelschnitt der Geraden erscheint, deren Strahlencoordinaten p_{ik} die Coefficienten der Hesse'schen Form H (9) der Form f (1) sind, so ist damit seine Bezeichnung „F'" gefordert.

Damit stimmt formal der Umstand überein, dass die N_2 umschriebenen Poldreiseite des Kegelschnitts F' (3) diejenige Involution dritter Ordnung auf N_2 bilden, die der der ersten Polaren von f (1) conjugirt ist, so dass also auch in dieser Hinsicht der Accent ein charakteristisches Merkmal des Kegelschnitts andeutet.

b) Die N_2 tragenden Kegelschnitte werden mit lateinischen Buchstaben belegt (gewöhnlich die F-Kegelschnitte (in Beziehung zu einer Form f) genannt). Dagegen die Kegelschnitte, denen Dreiseite ein- und N_2 umbeschrieben sind, mit griechischen Buchstaben (gewöhnlich die H Kegelschnitte genannt, in Beziehung zu einer Form H (9), der Hesseschen von f (1)).

Diese letztere Bezeichnung hat insofern allerdings etwas Missliches, als sonst den Klassenkegelschnitten diese (griechische) Bezeichnung beigelegt wird, und dadurch einige Collisionen unvermeidlich sind. Trotzdem habe ich mich für die gewählte Art entschieden, da der angegebene Gegensatz der F- und H-Kegelschnitte in unserer Theorie den

$$(4) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = a_0 \lambda^3 + 3\, a_1 \lambda^2 \mu + 3\, a_2 \lambda \mu^2 + a_3 \mu^3 \\ A_2 \equiv \frac{\partial f}{\partial \mu} = a_1 \lambda^3 + 3\, a_2 \lambda^2 \mu + 3\, a_3 \lambda \mu^2 + a_4 \mu^3 \end{cases}$$

Andrerseits ist dies die Involution der Tangententripel auf N_3, deren Regelschaaren dem Complexe $a_s = 0$ angehören. Die sämmtlichen Verbindungsebenen der zugehörigen Berührungspunktetripel gehen durch die eine Treffgerade des Tangentenquadrupels (1) (und diese heisse die dem Complex (2) „zugehörige" Gerade) und die sämmtlichen Schnittpunkte der Ebenentripel, die sich in genannten Berührungspunkten der Curve anschmiegen, durchlaufen die andere Treffgerade desselben Quadrupels (1). Oder kürzer:

Die Involution (1) ist die Ebeneninvolution der zum Complexe (2) zugehörigen Geraden und zugleich die Punktinvolution der zu jener conjugirten Geraden.

Für die zu (4) conjugirte Involution gilt dann das Umgekehrte. Nun waren (cf. Nr. 36) die Axencoordinaten einer Geraden, deren Ebeneninvolution durch

$$(5) \quad \begin{cases} u_\lambda \equiv u_3 \lambda^3 + 3\, u_2 \lambda^2 + 3\, u_1 \lambda + u_0 \\ v_\lambda \equiv v_3 \lambda^3 + 3\, v_2 \lambda^2 + 3\, v_1 \lambda + v_0 \end{cases}$$

gegeben ist, die folgenden:

$$(6) \quad \sigma q_{ik} = (uv)_{ik}$$

woraus sich die Liniencoordinaten derselben Geraden in bekannter Weise mittelst der Beziehungen:

$$(7) \quad \rho\, p_{ik} = q_{lm} \quad (i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$$

ergeben.

Somit lauten die Liniencoordinaten der Geraden mit der Ebeneninvolution (4):

---

gewöhnlichen dualistischen an Wichtigkeit übertrifft. Im Übrigen ist durch eine theilweise mehrfache Bezeichnung gesorgt, dass Missverständnisse nicht wohl möglich sind.

$$(8)\quad \rho p_{01} = a_0 a_2 - a_1^2,\quad \rho p_{20} = a_0 a_3 - a_1 a_2,$$
$$\rho p_{23} = a_2 a_4 - a_3^2,\quad \rho p_{31} = a_1 a_4 - a_2 a_3,$$
$$\rho p_{03} = a_1 a_3 - a_2^2,$$
$$\rho p_{12} = a_0 a_4 - a_1 a_3.$$

Mit Einführung dieser p_{ik} wird dann die Hesse'sche Form von f:

$$(9)\quad H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial A_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial A_2}{\partial \mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$
$$\equiv p_{01}\lambda^4 - 2 p_{02}\lambda^3\mu + \lambda^2\mu^2(3p_{03}+p_{12}) - 2\lambda\mu^3 p_{13} + p_{23}\mu^4,$$

also genau identisch mit der Darstellungsform einer Geraden, wie sie in Nr. 38 entwickelt wurde.

„Die ganze weitere Theorie beruht dann darauf, dass man nicht mehr die ursprüngliche Form f (1), sondern ihre Hesse'sche H (9) zum Ausgangspunkt nimmt."

81. Sind die homogenen symmetrischen Funktionen der Wurzeln von (9) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, bezeichnet mit s_0, s_1, s_2, s_3, s_4; so ergab sich (pg. 69): (wenn man den unwesentlichen Proportionalitätsfaktor gleich Eins setzt):

$$(10)\quad \begin{cases} p_{01} = s_0, p_{02} = \frac{s_1}{2}, 3p_{03} = \frac{s_2 + \sqrt{6i}}{2}, \\ p_{23} = s_4, p_{31} = \frac{s_3}{2}, \ p_{12} = \frac{s_2 - \sqrt{6i}}{2}, \end{cases}$$

wo i die Invariante zweiten Grades von f ist

$$(11)\quad i = \frac{(3p_{03} - p_{12})^2}{6}.$$

Durch Vertauschung von $3p_{03}$ mit p_{12} erhält man die Liniencoordinaten der zu (8) conjugirten Geraden.

Dann lautete die Gleichung (cf. Nr. 51) des zu $a_\sigma^2 = 0$ (3) gehörigen Kegelschnitts H (der durch die Ecken der N_2 umschriebenen Poldreiseite von $a_\sigma^2 = 0$ geht):

$$(12)\ H \equiv \eta_\sigma^2 \equiv \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_2 (p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Ferner sind die Liniencoordinaten einer Sehne (α, β) der cubischen Normcurve (wenn die σ_i die homogenen symmetrischen Funktionen von α, β sind) (cf. pg. 74):

$$(13) \begin{cases} \rho p'_{01} = \sigma_0^2, & \rho p'_{02} = \sigma_0\sigma_1, & \rho p'_{03} = \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3}, \\ \rho p'_{23} = \sigma_2^2, & \rho p'_{13} = \sigma_1\sigma_2, & \rho p'_{12} = 3\,\sigma_0\sigma_2 \end{cases}$$

woraus durch Vertauschung von $3\, p_{03}$ mit p_{12} wieder die Liniencoordinaten der Axe (α, β) hervorgehen.

Daher stellen die Punkte des Kegelschnitts H (12) die (Curven-)Axen des speciellen linearen Complexes H dar (wenn die π variable Liniencoordinaten sind):

$$(14)\ H_\pi \equiv \pi_{01} p_{23} + \pi_{23} p_{01} + \pi_{02} p_{31} + \pi_{13} p_{20} + \pi_{03} p_{12} + \pi_{12} p_{03} = 0$$

oder auch die Sehnen des zu H conjugirten Complexes.

„Dieser Zusammenhang zwischen den Gleichungen (14) und (12) bleibt aber auch vollkommen bestehen, wenn die p_{ik} irgend welche Coefficienten sind, also Complex (14) und Kegelschnitt (12) *allgemeine* werden."

Die Sehnen des Complexes (14) sind dann dargestellt durch:

$$(12')\ \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 \frac{p_{12}}{3} + \sigma_0\sigma_2 \left(3\, p_{03} - \frac{p_{12}}{3}\right) = 0 = H' = \eta'^2_\sigma$$

Dies ist also der zu (12) conjugirte Kegelschnitt; wenn

also die p Liniencoordinaten, der zu H conjugirte Kegelschnitt H'.

82. Die Kegelschnitte (12) (12') gewinnen eine übersichtlichere Form, wenn man den neuen Kegelschnitt $H_\sigma^2 = 0$ einführt, der aus N_2 das Punktquadrupel H ausschneidet und N_2 trägt, also sich zur Form H verhält, wie der Kegelschnitt F (3) oder $a_\sigma^2 = 0$ zur Form a_λ. Daher ist:

$$(15)\quad H_\sigma^2 \equiv \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0 \sigma_1 p_{31} + \sigma_1 \sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + (2\sigma_0 \sigma_2 + \sigma_1^2)\left(\frac{p_{03}}{2} + \frac{p_{12}}{6}\right) = 0$$

und der zu H gehörige lineare (sich selbst conjugirte) Complex:

$$(16)\quad H_s \equiv p_{01} s_4 + \frac{p_{20}}{2} s_3 + \left(\frac{p_{13}}{2} + \frac{p_{12}}{6}\right) s_2 + \frac{p_{31}}{2} s_1 + p_{23} s_0 = 0.$$

Dann schreiben sich die Kegelschnitte (12) (12') auch in der Form:

$$(17)\quad \begin{cases} \eta_\sigma^2 \equiv \mathrm{H}' \equiv H_2^2 - \frac{1}{6}(3 p_{03} - p_{12})(4\sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2) = 0 \\ \eta'^2_\sigma \equiv \mathrm{H} \equiv H_\sigma^2 + \frac{1}{6}(3 p_{03} - p_{12})(4\sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2) = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen wieder bei beliebigen p_{ik} irgend zwei allgemeine, einander conjugirte lineare Complexe dar d. h. genauer die Axen (Sehnen) der cubischen Normcurve, die ihnen angehören.

Sind dagegen die p_{ik} Liniencoordinaten, so kann man nach (11) den Faktor $\frac{1}{6}(3 p_{03} - p_{12})$ durch $\sqrt{\frac{i}{6}}$ ersetzen. (Cf pg. 68.)

Der zweite Faktor $(4\sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2)$ stellt, $= 0$ gesetzt, den Normkegelschnitt (N_2) dar. In den Formeln (17) steckte der Satz δ' (pg. 136).

83. Kehren wir noch einmal zum Kegelschnitt F (3)

zurück, so haben wir noch zu bemerken, dass seine Gleichung in Liniencoordinaten u der Ebene ist:

$$(18)\quad u_2^2 \equiv u_1^2 p_{10} - 2 u_0 u_1 p_{02} + 2 u_1 u_2 p_{13} + u_2^2 p_{23} - u_2^2 p_{12} + p_{13} + 2 u_0 u_2 p_{03} = 0.$$

Gerade wie dann der Kegelschnitt F (18) zum Kegelschnitt H (12) gehört, so zum conjugirten Kegelschnitt H' der weitere F':

$$(18')\quad u_2^2 \equiv u_1^2 p_{11} + 2 u_0 u_1 p_{02} + 2 u_1 u_2 p_{13} + u_2^2 p_{23} + u_1^2 \left(3 p_{03} + \frac{p_{12}}{3}\right) + 2 u_0 u_2 \frac{p_{12}}{3} = 0.$$

Wie H und H', so unterscheiden sich auch F, F' nur durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ und p_{12}.

Nennen wir die Coefficienten in (18) α_{ik}, die in (12) τ_{ik}, so ergiebt sich durch Vergleichung:

$$(19)\quad \tau_{000} = \alpha_{22},\ \tau_{001} = -2\,\alpha_{12},\ \tau_{112} = -2\,\alpha_{10},\ \tau_{122} = \alpha_{00},\ \tau_{111} = \alpha_{02},$$
$$\tau_{002} = 2\,\alpha_{11} - 4\,\alpha_{02}$$

oder umgekehrt:

$$(20)\quad \alpha_{00} = \tau_{122},\ \alpha_{01} = -\frac{\tau_{112}}{2},\ \alpha_{12} = -\frac{\tau_{001}}{2},\ \alpha_{22} = \tau_{000},$$
$$\alpha_{02} = \tau_{111},\ \alpha_{11} = \frac{\tau_{002}}{2} + 2\,\tau_{111}.$$

Daraus ersehen wir auch, dass

$$(21)\quad \alpha_{11} - 4\,\alpha_{02} = \frac{i_a}{2} = \frac{\tau_{002}}{2} - 2\,\eta_{11}$$

wo i_a die zu f (1) gehörige Invariante (zweiten Grades) ist.

Dies liefert nebenbei mit Rücksicht auf die Bedeutung der Gleichung

$$\alpha_{11} = 4\,\alpha_{02}$$

(cf. pg. 85) den Satz:

α) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt einen andern zugleich trägt und auf ihm ruht, ist die, dass das

Quadrupel der Schnittpunkte beider auf einem derselben ein aequianharmonisches ist. (Cf. Nr. 58).

Dann ist auch dasselbe Quadrupel, auf dem andern Kegelschnitt betrachtet, ein aequianharmonisches.

Endlich ist dann auch das gemeinsame Tangentenquadrupel beider, sowohl auf dem einen, als dem andern Kegelschnitt betrachtet, ein aequianharmonisches."

Aus Früherem (cf. pg. 80) wissen wir, dass unter dieser Bedingung ($i_s = 0$) der Complex (2) $a_s = 0$ ein spezieller wird und umgekehrt.

Daraus folgt aber die Ergänzung zum letzten Satze:

α_1) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt einen andern zugleich trägt und auf ihm ruht, ist auch die, dass er in Bezug auf den andern zugleich ein Kegelschnitt f und H ist d. h. dass es unendlich viele Poldreiseite des ersten giebt, die dem zweiten umbeschrieben sind, und zugleich unendlich viele Dreiseite, die dem ersten ein- und dem zweiten umbeschrieben sind. Die beiden Schaaren von Dreiseiten bilden (vermöge ihrer Seiten als Tangenten des zweiten Kegelschnitts) auf dem letzteren zwei conjugirte Involutionen dritter Ordnung."

Man erkennt dies auch folgendermassen.

Irgend ein Kegelschnitt

$$b_\sigma^2 \equiv \Sigma\Sigma\, b_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k = 0$$

wird dann zu einem H-Kegelschnitte (12), wenn seine Coefficienten die Liniencoordinatenidentität erfüllen d. h. wenn (cf. pg. 99):

$$(22)\quad b_{00}\, b_{22} - 4\, b_{01}\, b_{12} + b_{11}\, (2\, b_{02} + b_{11}) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung, in den Coefficienten des Kegelschnitts (3) geschrieben, ist

$$(23)\quad a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2 = \frac{i_2}{2}$$

q. e. d.

84. Jetzt nehmen wir die Frage nach den Bildern der Geraden eines ganz allgemeinen Complexes C in Angriff. Derselbe sei (bei ganz beliebigen Coefficienten p_{ik}) gegeben durch die Form (14), die man auch so schreiben kann:

$$(24)\quad C = \pi_{01}\, p_{23} + \pi_{23}\, p_{01} + \pi_{02}\, p_{31} + \pi_{13}\, p_{20}$$
$$+ (\pi_{12} + \pi_{03})\, p_{03} + \pi_{03}\, (p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Dann sind die ihm angehörigen Curvenaxen dargestellt durch die Form (12):

$$(25)\quad C'^2_\sigma = \sigma_0^2\, p_{23} + \sigma_0\sigma_1\, p_{31} + \sigma_1\sigma_2\, p_{20} + \sigma_2^2\, p_{01} + \sigma_1^2\, p_{03}$$
$$+ \sigma_0\sigma_2\, (p_{12} - p_{03}) = 0 \equiv p_\sigma^2.$$

Mithin sagt die Bedingung (24) bekanntermassen aus, dass der Kegelschnitt (25) apolar ist zum folgenden:

$$(26)\quad u_\pi^2 = u_0^2\, \pi_{01} + 2\, u_0 u_1\, \pi_{02} + 2\, u_1 u_2\, \pi_{13} + u_2^2\, \pi_{23}$$
$$+ u_1^2\, (\pi_{12} + \pi_{03}) + 2\, u_0 u_2\, \pi_{03} = 0.$$

Dies ist aber der Kegelschnitt F' (18), nur dass statt der festen Liniencoordinaten p_{ik} dort variable Liniencoordinaten π_{ik} (aller Geraden des Complexes C) hier auftreten.

Durch Vertauschung von $3\, \pi_{03}$ mit π_{12} geht der Complex C in den ihm conjugirten über oder was dasselbe ist, die Axen des Complexes C in seine Sehnen: desgleichen Kegelschnitt (18) in den ihm conjugirten (18') (in den π_{ik} geschrieben). Dies liefert aber mit Hülfe des Satzes pg. 148 den wichtigen Satz:

5) „Sind die Axen eines allgemeinen Complexes C durch den Kegelschnitt C' dargestellt,

so entsprechen den Geraden des Complexes die H-Kegelschnitte, deren zugehörige F-Kegelschnitte den Normkegelschnitt N_2 *tragen* und zugleich auf C' *ruhen*.

Vertauscht man die Axen des Complexes C mit seinen Sehnen (oder, was dasselbe ist, mit den Axen des conjugirten Complexes C'), so geht auch der Kegelschnitt C' in seinen conjugirten C über (wo C dadurch bestimmt ist, dass das Paar C, C' harmonisch liegt zum Paare H^2_{σ}, N_2)."

85. Die letzte (Klammer-) Bemerkung ist schon früher (pg. 135) bewiesen, und zwar im Anschluss an die Form f (1). Da jetzt die Form H zu Grunde liegt, so modificiren sich die damaligen Entwicklungen in folgender Art.

Setzt man den Complex (24) linear aus zwei andern zusammen, deren einer der Nullcomplex der cubischen Normcurve sein soll, so erhält man zunächst:

$$(24)\ [\pi_{01}\,p_{23} + \pi_{23}\,p_{01} + \pi_{02}\,p_{31} + \pi_{13}\,p_{20} + \pi_{03}\,p_{12} + \pi_{12}\,p_{03} - z\,(3\,\pi_{03} - \pi_{12})] + z\,[3\,\pi_{03} - \pi_{12}] = 0$$

wo z noch variabel ist.

Man bestimmt jetzt z so, dass der erste Ausdruck in (24) durch sein Verschwinden einen sich selbst conjugirten Complex darstellt, d. h. einen solchen, der sich durch Vertauschung von $3\,\pi_{03}$ mit π_{12} nicht ändert. Dies findet offenbar nur statt, wenn der Coefficient von π_{12}, mit drei multiplicirt, gleich dem Coefficienten von π_{03} wird. Dies ergiebt

$$(27)\ z = -\frac{3\,p_{03} - p_{12}}{6}$$

und unser Complex C geht daher in die Form über:

$$(24')\ [\pi_{01}p_{23} + \pi_{23}p_{01} + \pi_{02}p_{31} + \pi_{13}p_{20} + \frac{1}{6}(3\pi_{03} + \pi_{12})(3p_{03} + p_{12})] - [\frac{1}{6}(3\,\pi_{03} - \pi_{12})\,(3\,p_{03} - p_{12})] = 0.$$

Dann geht aus (24)' der conjugirte Complex C' dadurch hervor, dass man dem zweiten Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen beilegt.

Dementsprechend formt sich die Gleichung für die (Curven-) Axen (25) unseres Complexes C in folgende um:

$$(25')\ C_\sigma^2 \equiv [\sigma_0^2\, p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{30} + \sigma_2^2 p_{01} + \frac{1}{6}(3p_{03} + p_{12})$$

$$(\sigma_1^2 + 2\,\sigma_0\sigma_2)] - [\frac{1}{6}(3\,p_{03} - p_{12})\,(4\,\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2)] = 0,$$

oder kürzer wegen (15):

$$(25')\ C_\sigma^2 \equiv H_\sigma^2 - \frac{1}{6}(3p_{03} - p_{12})\,N_2 = 0,\ \text{wo}\ N_2 \equiv 4\,\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2\ \text{ist.}$$

Daher schreibt sich auch die Gleichung des Complexes (24') mit Einführung der Bezeichnung

$$(28)\quad N_3 \equiv 3\,\pi_{03} - \pi_{12}$$

und mit Berücksichtigung von (15) (16) kürzer so:

$$(24')\ C \equiv H_3 - \frac{1}{6}(3\,p_{03} - p_{12})\,N_3 = 0.$$

Damit ist der Beweis unserer Klammer-Bemerkung aufs Neue geleistet.

86. Daraus erhält man im Besondern für die Geraden der ausgezeichneten Complexe H_3, N_3 sofort Folgendes:

γ) „Den Geraden eines sich selbst conjugirten Complexes $H_3 = 0$ (der mit der cubischen Normcurve das Tangentenquadrupel H gemein hat) entsprechen die H-Kegelschnitte der Ebene, deren zugehörige F-Kegelschnitte (den Normkegelschnitt N_2 tragen) und auf dem Kegelschnitt $H_3^2 = 0$ ruhen, wo der letztere N_2 im Punktquadrupel H trifft und N_2 trägt."

„Ist der sich selbst conjugirte Complex im Besondern der Nullcomplex der cubischen Normcurve (dem alle Tangenten der Curve angehören),

so tritt an die Stelle des Kegelschnitts $H_\sigma^2 = 0$ der Normkegelschnitt N_2 selbst. Dann entsprechen also den Geraden des Nullcomplexes alle die H-Kegelschnitte, deren zugehörige F-Kegelschnitte (N_2 tragen und) auf N_2 ruhen."

Der letztere Satz ist schon bereits im Satze α_1 (pg. 151) enthalten, da bekanntlich (cf. Nr. 39) jede Gerade des Nullcomplexes von einem aequianharmonischen Tangentenquadrupel getroffen wird (und umgekehrt ein jedes Quadrupel dieser Art eine Gerade des Nullcomplexes liefert).

87. Herrscht endlich zwischen den Coefficienten p_{ik} die Liniencoordinatenidentität, d. h. wird der Complex (24) ein specieller, so wird der Kegelschnitt der Ebene, der seine (Curven-) Axen darstellt, ein H'-Kegelschnitt. Man hat daher in Satz β) nur für C' zu setzen H'. Aber in diesem Falle vereinfacht sich der Ausdruck des Satzes bedeutend, wie aus dem Satze (λ_2) des vorigen Paragraphen hervorgeht. Der Grund davon liegt in Folgendem.

Da die p_{ik} jetzt Liniencoordinaten sind, kann man sie in die Gleichung (26) einsetzen, dann stellt

$$(29)\quad u_p^2 = 0$$

den festen F'-Kegelschnitt dar, der zum Kegelschnitt H' (der die Axen des Complexes H darstellt) gehört.

Setzt man andrerseits in die Gleichung (25) für den Kegelschnitt C' statt der festen p_{ik} die variabeln π_{ik}, so entsteht dadurch aus (25):

$$(30)\quad \pi_\sigma^2 = 0$$

die Gleichung des variabeln H'-Kegelschnitts, der die Axen einer Geraden unseres speciellen Complexes H darstellt.

Nun ändert sich die Bedingung der Apolarität zwischen den Kegelschnitten (25) (26) durch Vertauschung der p_{ik}

und π_{ik} nicht, also trägt auch der variable H'-Kegelschnitt (30) den festen F'-Kegelschnitt.

Endlich ändert sich unsere Apolaritätsbedingung (24) auch nicht durch gleichzeitige Vertauschung von $3p_{03}$ mit p_{12}, $3\pi_{03}$ mit π_{12}, wodurch also jetzt auch unser (specieller) Complex H unverändert bleibt, während die Kegelschnitte (25) (26), und damit auch (29) (30) in ihre resp. conjugirten übergehen. Dies ist aber der Satz λ_2 (pg. 143).

δ) „Die Bilder der Geraden eines speciellen Complexes H sind alle die H-Kegelschnitte der Ebene, die den zum Kegelschnitt H (der das Bild der Complexaxe ist) gehörigen F'-Kegelschnitt tragen."

§. 22.

Ergänzung der bisherigen Formeln.

88. Wir haben jetzt noch, im Anschluss an die gewonnene geometrische Grundlage der H- und F-Kegelschnitte, eine Reihe von Fragen zu erledigen, die, so zu sagen, das Apolaritätsmaterial der Complex- und Kegelschnittstheorie abrunden, von denen einige jedoch einer wichtigen rein algebraischen Ausdrucksweise fähig sind. Gleich die erste der Reihe ist von dieser Art.

Durch das Punktquadrupel H auf N_2 gingen zwei H-Kegelschnitte H, H', denen zwei F-Kegelschnitte F, F' zugehörten, die mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein hatten und auf H resp. H' ruhten.

Die Involution dritter Ordnung der Tangenten von N_2 als Seiten der H' einbeschriebenen Poldreiseite von F' war die der ersten Polaren der Ausgangsform f (1). Diese selbst war das Quadrupel der Schnittpunkte von N_2 und F'.

In gleicher Weise ist dann das Quadrupel der Schnitt-

punkte von N_2 und F, es heisse f', die Form, deren erste Polaren die zu den Kegelschnitten H und F gehörige, zur ersten conjugirte Involution bilden.

Wir suchen die Form f', d. h. die Schnittpunkte von N_2 mit F.

Nun geht der Kegelschnitt F (als Klassenkegelschnitt aufgefasst) aus F' (26) hervor, indem man $3\pi_{03}$ mit π_{12} vertauscht.

Ehe wir aber so die Form für F aufstellen, legen wir statt der biquadratischen Form f (1) eine canonische Form zu Grunde, indem wir, was immer erlaubt ist, $a_1 = a_3 = 0$ nehmen.

Dann wird aus den Gleichungen (8) (26):

$$(31)\ p_{02} = p_{31} = 0,\ p_{01} = a_0 a_2,\ p_{23} = a_2 a_4,\ p_{03} = -a_2^2,\ p_{12} = a_0 a_4$$

$$(32)\ F' \equiv u_0^2 a_0 a_2 + u_1^2 (a_0 a_4 - a_2^2) + u_2^2 a_2 a_4 - 2 u_0 u_2 a_2^2$$

und F gewinnt die Gestalt:

$$(33)\ F \equiv u_0^2 a_0 a_2 + u_1^2 \frac{(a_0 a_4 - 9 a_2^2)}{3} + u_2^2 a_2 a_4 + 2 u_0 u_2 \frac{a_0 a_4}{3}.$$

Leitet man daraus in gewöhnlicher Weise die Gleichung von F in Punktcoordiuaten ab, so kommt:

$$(34)\ F \equiv \left\{\frac{a_0 a_4 - 9 a_2^2}{3}\right\}\left\{x_0^2 a_2 a_4 - x_1^2 \frac{a_0 a_4}{3} + x_2^2 a_0 a_2 - 2 x_0 x_2 \frac{a_0 a_4}{3}\right\}.$$

Mithin schneidet F den Normkegelschnitt N_2 in dem Quadrupel:

$$(35)\ f' \equiv \left\{\frac{a_0 a_4 - 9 a_2^2}{3}\right\}\left\{\lambda^4 a_0 a_2 \quad - \quad 2\lambda^2 a_0 a_4 \quad + \quad a_2 a_4\right\}.$$

Da f' und f in der Beziehung stehen, dass ihre ersten Polaren zwei conjugirte Involutionen bilden, so ist f' eine Covariante von f, also bekanntlich (weil vom vierten Grade in λ) in der Form

$$(36)\ f' \equiv x j f + y i H$$

wo x, y Zahlenfaktoren, j, i die bekannten Invarianten von f sind und zwar für die gewählte canonische Form:

$$(37)\ j = 6\, a_2\, (a_0\, a_4 - a_2^2), \qquad i = 2\, (a_0\, a_4 + 3\, a_2^2).$$

Der Coefficient von λ^4 im Ausdruck $x\, j\, f + y\, i\, H$ wird dann:

$$(38)\ C = a_0\, a_2\, [a_0\, a_4\, (6\, x + 4\, y) - a_2^2\, (6\, x - 12\, y)]$$

Um für die gesuchte Form f' die Faktoren x, y zu finden, genügt es, die Coefficienten von λ^4 gleich zu setzen, dies ergiebt:

$$(39)\ x = -y = \frac{1}{6} \text{ und daher}$$

$$(40)\ 6\, f' = j\, f - i\, H.$$

In der That überzeugt man sich leicht, dass für die beiden Involutionen

$$(41) \begin{cases} f_1 + \varkappa\, f_2 \equiv (\lambda^3\, \alpha_0 + \lambda^2\, 0 + 3\, \lambda\, \alpha_2 + 0) \\ f'_1 + \varkappa'\, f'_2 \equiv (\lambda^3\, a_0\, a_2 + \lambda^2\, 0 + \lambda\, (-\, a_0\, a_4) + 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \varkappa\, (\lambda^3\, 0 + 3\, \lambda^2\, \alpha_2 + \lambda . 0 + \alpha_4) \\ + \varkappa'\, (\lambda^3\, 0 - \lambda^2\, (a_0\, a_4) + \lambda . 0 + (-\, a_2\, a_4) \end{cases}$$

die Bedingung (7)

$$\rho p_{ik} = q_{lm}$$

erfüllt sind.

Wir drücken dies in dem Satze aus:

ε) „Stehen zwei biquadratische binäre Formen in der invarianten Beziehung, dass die Involutionen ihrer ersten Polaren conjugirt sind, und ist die eine f, so ist die andere „$\frac{j\, f - i\, H}{6}$"; wo i, j, H die bekannten In-(Co-)varianten von f sind."

89. Die geometrisch correspondirende Frage ist die nach den gemeinsamen Tangenten des Normkegelschnitts N_2 und des zu F gehörigen Kegelschnitts H.

Das gemeinsame Tangentenquadrupel von N_2 und H' (wo H' zu H conjugirt ist) war schon früher (Nr. 56) gefunden:

$$(42)\ \Phi \equiv \frac{1}{48}(2jf - 3iH)$$

Da sich nun H' zu f verhält, wie H zu f', so entsteht die algebraische Aufgabe, die Covariante (42) für die Grundform f' (40) aufzustellen.

Wir lösen jedoch die Frage geometrisch in demselben Sinne, wie die eben behandelte.

Vertauscht man in (25) $3p_{03}$ mit p_{12}, so ergiebt sich der zu H' conjugirte Kegelschnitt H. Für die canonische Form von f' ($a_1 = a_3 = 0$) hat man demnach:

$$(43)\ H \equiv \sigma_0^2 a_2 a_4 + \sigma_1^2 \frac{a_0 a_4}{3} + \sigma_2^2 a_0 a_2 - 2\sigma_0\sigma_2 \cdot \frac{9a^2 + a_0 a_4}{6}.$$

mithin die dualistische Gleichung (in Liniencoordinaten u):

$$(44)\ H \equiv u_0^2 \frac{a_0^2 a_2 a_4}{3} + u_2^2 \frac{a_4^2 a_0 a_2}{3} - \frac{u_1^2}{36}(a_0 a_4 - 9a_2^2)^2$$

$$+ \frac{u_0 u_2}{36} a_0 a_4 (a_0 a_4 + 9a_2^2)$$

und das mit N_2 gemeinsame Tangentenquadrupel:

$$(45)\ \Phi' \equiv \lambda^4 \frac{a_0^2 a_2 a_4}{3} + \frac{\lambda^2}{12}(a_0^2 a_4^2 + 18 a_0 a_4 a_2^2 - 27 a_2^4)$$

$$+ \mu^4 \frac{(a_2 a_0 a_4^2)}{3} \equiv x_1 jf + y_1 iH.$$

Bestimmt man die Zahlenfaktoren x_1, y_1 wie oben, so kommt:

$$x_1 = \frac{1}{24},\quad y_1 = \frac{1}{48} \quad \text{und also endlich:}$$

$$(46)\ \Phi' \equiv \frac{1}{48}(2jf + iH)$$

90. Es empfiehlt sich für das Weitere besonders, das Büschel von Kegelschnitten, das N_2 im Punktquadrupel H trifft, aus den beiden durch H gehenden H-Kegelschnitten, und

analog die Schaar von (Klassen-) Kegelschnitten, die mit N_2 das gemeinsame Tangentenquadrupel H besitzen, aus den beiden (zu den beiden H-Kegelschnitten) zugehörigen F-Kegelschnitten (linear) zusammenzusetzen.

Zuvor mag noch für die Darstellung des Kegelschnitts F (in Punktcoordinaten) eine einfache Folgerung aus dem Satze (ε) gezogen werden.

Je nachdem man den Apolaritätsuntersuchungen die Form f oder H zu Grunde legt, wird man die beiden zu H gehörigen F-Kegelschnitte in Punkt- oder Liniencoordinaten darstellen (während man sich für die bezüglichen H-Kegelschnitte, abgesehen von der eben gelösten Frage, auf ihre Darstellung in Punktcoordinaten beschränken wird).

Die beiden F-Kegelschnitte, die zur Form f resp. H gehören, sind in Liniencoordinaten durch (25) oder (25′) (wo durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} i. e. des Vorzeichens von $(3\,p_{03} - p_{12})$ in (25′) der eine aus dem andern hervorgeht) dargestellt: der Kegelschnitt F' (der eine von beiden) durch Gleichung (3)

$$a_\sigma^2 = 0.$$

Es erübrigt also nur noch die Punktdarstellung von F.

Schreibt man die Form H in der Weise:

$$(47)\quad H \equiv h_0\,\lambda^4 + 4\,h_1\,\lambda^3 + 6\,h_2\,\lambda^2 + 4\,h_3\,\lambda + h_4 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

so geht die gesuchte Form für F aus dem Satze (ε) sofort hervor:

ε_1) „Die Gleichung des zum F-Kegelschnitte

$$(3)\quad F' \equiv a_\sigma^2 = 0$$

conjugirten Kegelschnitts

$$(48)\quad F \equiv b_\sigma^2 = 0$$

erhält man mittelst der Relationen:

(49) $\rho b_i = j\, a_i - i\, h_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$

Dann sind die Involutionen, die die Seiten der (N_2) umschriebenen Poldreiseite von F, F' auf N_2 bilden, einander conjugirt."

91. Wir untersuchen jetzt die ausgezeichneten Kegelschnitte der Schaar $F + k F'$ mit dem gemeinsamen Tangentenquadrupel H (auf N_2), wo (cf. (18) (18')):

$$(50) \begin{cases} F' \equiv u_1^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} \\ F \equiv u_0^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} + u_1^2 (p_{12} + p_{03}) + 2\, u_0\, u_2\, p_{03} = 0 \\ + u_1^2 (3\, p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) + 2\, u_0\, u_2 \cdot \frac{p_{12}}{3} = 0. \end{cases}$$

Zunächst erhält man sofort:

$$(51) \begin{cases} F - F' \equiv 2\, (p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\, (u_1^2 - u_0\, u_2) \\ F + F' \equiv 2\, (u_0^2\, p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23}) \end{cases}$$

$$+ 4\, u_1^2\, (p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) + 2\, u_0\, u_2\, (p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) \equiv 2\, \Phi.$$

Nennt man unsere Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten H kurz die „Schaar H" (und dualistisch das Büschel mit den gemeinsamen Grundpunkten H das „Büschel H"), so kann man das Resultat (51) so ausdrücken:

ζ) „Legt man der Schaar „H" die beiden F-Kegelschnitte (50) zu Grunde, so erhält man den Kegelschnitt der Schaar, der auf N_2 ruht, aus ihnen durch Addition, dagegen den Normkegelschnitt selber durch Subtraction.

Mithin liegt das Paar „F" zu diesem ausgezeichneten Paar harmonisch."

Umgekehrt ergiebt sich sofort aus (51): (cf. 11)

$$(52)\begin{cases} F \quad \Phi+(p_{03}-\frac{p_{12}}{3})(u_1^2-u_0\,u_2)=\Phi+\sqrt{\frac{2i}{3}}(u_1^2-u_0 u_2) \\ F' \quad \Phi-(p_{03}-\frac{p_{12}}{3})(u_1^2-u_0\,u_2)=\Phi-\sqrt{\frac{2i}{3}}(u_1^2-u_0 u_2). \end{cases}$$

92. Wir suchen nunmehr auch die Schnittpunkte des Kegelschnitts Φ mit N_2.

Für unsere canonische Form von f ergiebt sich:

$$(53)\,\Phi = u_0^2 a_0 a_2 + 2u_1^2\frac{a_0\,a_4-3\,a_2^2}{3}+u_2^2 a_2 a_4+2u_0 u_2\frac{a_0 a_4-3\,a_2^2}{6}$$

also Φ in Punktcoordinaten:

$$(54)\,\Phi = x_0^2\frac{2}{3}\,(a_0\,a_4-3\,a_2^2)\,a_2\,a_4+x_2^2\,\frac{2}{3}\,(a_0\,a_4-3\,a_2^2)\,a_0\,a_2$$
$$+x_1^2\,\{a_0 a_4 a_2^2-\frac{1}{36}(a_0 a_4-3\,a_2^2)^2\}-\frac{2}{9}\,x_0\,x_2\,(a_0\,a_4-3\,a_2^2)^2$$

und das Punktquadrupel, welches Φ aus N_2 ausschneidet:

$$(55)\,\Phi_\lambda = \frac{2}{3}\,\lambda^4 a_0 a_2 (a_0 a_4-3a_2^2)+\frac{\lambda^2}{3}(18\,a_0\,a_4\,a_2^2-a_0^2 a_4^2-9\,a \text{[illegible]})$$
$$+\frac{2}{3}\,\mu^4\,a_2\,a_4\,(a_0\,a_4-3\,a_2^2)\equiv x_2\,j\,f+y_2\,i\,H.$$

Für die Zahlenfaktoren kommt:

$$(56)\;x_2=\frac{1}{6},\;y_2=-\frac{1}{12}\;\text{mithin:}$$

$$(57)\;\Phi_\lambda=\frac{1}{12}\,(2\,j\,f-i\,H)$$

Dies Resultat war auf andere Weise vorauszusehen. Denn wir wissen, dass ein Kegelschnitt (3) $a_\sigma^2=0$, der N_2 trägt und aus N_2 das Quadrupel f (1) ausschneidet, mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein hat.

Mithin muss dualistisch ein Kegelschnitt, der auf N_2 ruht und mit N_2 das Tangentenquadrupel g gemein hat, N_2 im Quadrupel $H(g)$ treffen, wo $H(g)$ die Hesse'sche Form von g ist.

Für unsern Kegelschnitt Φ ist aber die Form g identisch mit H (von f), und daher die gesuchte Form Φ_λ die Hesse'sche Form der Hesse'schen Form von f. Diese ist aber bekanntlich die Form (57).

93. Ehe wir die Beziehungen zwischen den bis jetzt gewonnenen biquadratischen Formen erörtern, stellen wir gleich die allgemeine Frage nach den Tangenten resp. Punkten, die die Kegelschnitte des Büschels „H" resp. der Schaar „H" mit dem Normkegelschnitt N_2 resp. N_2 gemein haben.

Die Kegelschnitte des Büschels „H" bilden, als Klassenkegelschnitte aufgefasst, eine quadratische Schaar. Aber es ist leicht zu sehen, dass die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte dieser Schaar wieder ein Büschel bilden. Denn da sich unter dem Büschel „H" (oder $\mathrm{H}' + k\,\mathrm{H}$) der Normkegelschnitt selbst befindet, der mit sich selber unendlich viele Tangenten gemein hat, so muss sich auf der linken Seite der Gleichung für die gesuchten Tangentenquadrupel ein in k ganzer, linearer Faktor absondern. Denn nur so kann diese Gleichung für einen gewissen Werth von k identisch verschwinden. Das Analoge gilt von der Schaar „H".

Wir schreiben homogen das Büschel „H" in der Form (cf. 50)

$$(58)\quad \alpha\mathrm{H}' + \beta\mathrm{H} = 0$$

d. i. (cf. 25): $[\alpha\beta]_\sigma \equiv$

$$\alpha\{\sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_2(p_{12} - p_{03})\}$$

$$+\beta\{\sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2\frac{p_{12}}{3} + \sigma_0\sigma_2(3p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\} = 0.$$

Da aber

$$(59)\quad \mathrm{H}' - \mathrm{H} = (p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\,(\sigma_1^2 - 4\,\sigma_0\,\sigma_2),$$

so muss sich, da sich die in Frage stehenden Tangentenqua-

drupel für H′, H selbst (cf. (42) (46)) als lineare Combinationen von $j\,f$ und $i\,H$ ergaben, die ganze Schaar derselben in der Form darstellen lassen:

$$(60)\quad \frac{\alpha+\beta}{3}\,(Xjf + Y\,i\,H) \equiv [\alpha\,\beta]_\lambda = 0$$

$$\text{wo } (61)\quad X = \xi_1\,\alpha + \eta_1\,\beta,\quad Y = \xi_2\,\alpha + \eta_2\,\beta.$$

Es sind somit nur noch die Zahlenfaktoren ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 zu bestimmen.

Zu dem Zweck machen wir wieder von derselben canonischen Form für f (1) Gebrauch, wie bei den letzten Fällen.

Dann geht (58) zufolge der Gleichungen (31) über in:

$$(62)\quad \sigma_0^2\,a_2\,a_4\,(\alpha+\beta) + \sigma_2^2\,a_0\,a_2\,(\alpha+\beta) + \frac{\sigma_1^2}{3}\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha) +$$

$$2\,\sigma_0\sigma_2\,\frac{1}{6}\,\left\{a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2\,(\alpha - 3\,\beta)\right\} = 0 \equiv [\alpha\,\beta]_\sigma$$

mithin in Liniencoordinaten:

$$(63)\quad [\alpha\,\beta]_u = u_0^2\,\frac{\alpha+\beta}{3}\quad a_0\,a_2\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha)$$

$$+\frac{u_1^2}{36}\left\{36\,(\alpha+\beta)^2\,a_0\,a_4\,a_2^2 - [a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2(\alpha - 3\beta)^2]\right\}$$

$$-2\,u_0\,u_2\,\frac{1}{18}\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha)\,\{a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2\,(\alpha - 3\beta)\}$$

$$+\,u_2^2\,\frac{\alpha+\beta}{3}\quad a_2\,a_4\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha) = 0.$$

Dann liefert die Combinirung von dieser Gleichung mit der des Normkegelschnitts N_2:

$$(64)\quad \frac{\alpha+\beta}{3}\,[\lambda^4\,a_0\,a_2\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha) + \frac{\lambda^2}{4}\,\{18\,(\alpha+\beta)\,a_0\,a_4\,a_2^2$$

$$+\,9a_2^4\,(\alpha - 3\,\beta) - a_0^2\,a_4^2\,(3\,\alpha-\beta)\} + \mu^4\,a_2\,a_4\,(a_0\,a_4\,\beta$$

$$-\,3\,a_2^2\,\alpha)] = 0$$

und durch Vergleichung mit (60):

(65) $X = \frac{\alpha + \beta}{8}$, $Y = \frac{\beta - 3\alpha}{16}$, und demnach endlich:

$$(66)\ [\alpha\,\beta]_\lambda \equiv \frac{\alpha + \beta}{3}\,\frac{1}{16}\,\{2\,(\alpha + \beta)\,j\,f + (\beta - 3\,\alpha)\,i\,H\} \text{ oder:}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\{\alpha\,(2\,j\,f - 3\,i\,H) + \beta\,(2\,j\,f + i\,H)\}.$$

94. Es schliesse sich unmittelbar daran an die ganz analoge Behandlung der Schaar „H“:

$$(67)\ \gamma\,F' + \delta\,F \equiv \text{(cf. 52)}$$

$$\gamma\,\{u_0^2\,p_{01} + 2\,u_0\,u_1\,p_{02} + 2\,u_1\,u_2\,p_{13} + u_2^2\,p_{23} + u_1^2\,(p_{12} + p_{03}) + 2\,u_0\,u_2\,p_{03}\} + \delta\,\{u_0^2\,p_{01} + 2\,u_0\,u_1\,p_{02} + 2\,u_1\,u_2\,p_{13} + u_2^2\,p_{23} + u_1^2\,(3\,p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) + 2\,u_0\,u_2\,\frac{p_{12}}{3}\} = 0 \equiv [\gamma\,\delta]_u.$$

Da nach (51)

$$(51)\ F' - F \equiv 2\,(p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\,(u_0\,u_2 - u_1^2)$$

so kann man, wie vorher, schliessen, dass die Schaar der gesuchten Schnittpunktquadrupel (mit N_2) dargestellt ist durch

$$(68)\ [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\alpha + \beta}{3}\,(U\,j\,f + V\,i\,H)$$

wo sich U, V linear und ganz aus γ, δ zusammensetzen.

Für die canonische Form von f geht (67) über in: (69)

$$[\gamma\ \delta]_u = u_0^2\,a_0\,a_2\,(\gamma + \delta) + u_2^2\,a_2\,a_4\,(\gamma + \delta) + \frac{u_1^2}{3}\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\} + \frac{2\,u_0\,u_2}{3}\,(a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma) = 0$$

also in dualistischer Darstellung:

$$(70)\ [\gamma\,\delta]_x \equiv x_0^2\,\frac{\gamma + \delta}{3}\,a_2\,a_4\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\} + \frac{x_1^2}{9}\,\{9\,a_0\,a_4\,a_2^2\,(\gamma + \delta)^2 - (a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma)^2\} - 2\,x_0\,x_2\,\frac{1}{9}\,(a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma)\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\}$$

$$+ x_2^2 \frac{\gamma + \delta}{3} a_0 a_2 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\} = 0$$

was mit der Gleichung des Normkegelschnitts N_2 combinirt, zum Punktquadrupel führt:

$$(71)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\gamma + \delta}{3} [\lambda^4 a_0 a_2 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\}$$
$$+ 2\lambda^2 \{9 a_0 a_4 a_2^2 (\gamma + \delta) - a_0^2 a_4^2 \delta - 9 a_2^4 \gamma\}$$
$$+ a_2 a_4 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\}] = 0.$$

Der Vergleich mit (68) ergiebt durch Rechnung:

$$(72)\quad U = \frac{\gamma + \delta}{2}, \quad V = -\frac{\delta}{2}$$

und endlich damit:

$$(73)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\gamma + \delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \{(\gamma + \delta) f j - i \beta \dot{H}\}$$
$$= \frac{\gamma + \delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \{\gamma (j f) + \delta (j f - i H)\} = 0.$$

95. Diese beiden Resultate für $[\alpha\,\beta]_\lambda$, $[\gamma\,\delta]_\lambda$ mögen ihren besondern Ausdruck in dem Satze finden:

(η) „Das *Büschel* „*H*" der Kegelschnitte (die N_2 im Punktquadrupel *H* treffen):

$$(58)\quad \alpha H' + \beta H = 0$$

hat mit N_2 die Tangenteninvolution

$$(66)\quad [\alpha\,\beta]_\lambda \equiv \alpha (2 j f - 3 i H) + \beta (2 j f + i H),$$

andrerseits die *Schaar* „*H*" der Kegelschnitte (die mit N_2 das Tangentenquadrupel *H* gemein haben)

$$(67)\quad \gamma F' + \delta F = 0$$

hat mit N_2 die Punktinvolution

$$(73)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \gamma j f + \delta (j f - i H) = 0$$

gemein."

96. Handelt es sich nur um dieses Schlussresultat (η), so hätte man weit einfacher zum Ziele kommen können.

Denn da wir, um zunächst das Büschel „H" in der Weise zu behandeln, wissen, dass H resp. H' mit N_2 die Tangenten (cf. (42), (46)

$$2jf - 3iH = 0,\ 2jf + iH = 0$$

gemein hat, und ausserdem die Gleichung aller seiner Tangentenquadrupel, wenn man das Büschel in der Form

$$\mathrm{H}' + k\,\mathrm{H} = 0$$

schreibt, linear in k sein muss (cf. 60), so kann dieselbe nur die Form haben:

$$(2jf - 3iH) + \mu k (2jf + iH) = 0$$

wo μ zu bestimmen ist.

Nun kann für $k = -1$ (cf. (59)) diese Gleichung nur zu $H = 0$ werden, und umgekehrt, denn es giebt keinen andern Kegelschnitt, der mit N_2 die Punkte H und zugleich mit N_2 die Tangenten H gemein hat, als den Normkegelschnitt selbst.

Dadurch bestimmt sich $\mu = 1$, und wir haben die Form (66).

Genau in derselben Weise kann man die Schaar „H" behandeln. Die Kegelschnitte F', F haben mit N_2 die Punkte (cf. (40))

$$f = 0,\ jf - iH = 0$$

gemein, und für den Normkegelschnitt, als Kegelschnitt der Schaar, kann die Gleichung der Punktquadrupelschaar nur zu $H = 0$ werden, so dass man sogleich zur Form (73) kommt.

97. Mittelst des Satzes (η) gehört zu jeder Form

$$(74)\quad \xi jf + \eta iH = 0$$

ein einziger Kegelschnitt der Schaar „H" und ein einziger des Büschels „H", sodass diese beiden Reihen dadurch projektivisch auf einander bezogen sind; und zwar wird für den Kegelschnitt des Büschels „H" (58)

$$\alpha = \frac{\xi - 2\eta}{8},\ \beta = \frac{3\xi + 2\eta}{8}$$

also seine Gleichung

$$(75)\quad \xi(H' + 3H) + 2\eta(H - H') = 0.$$

Speciell der Form f entspricht also der folgende:

$$(76)\quad H' + 3H \equiv \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0 \sigma_1 p_{31} + \sigma_1 \sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p \ldots$$

$$+ \sigma_1^2 \frac{(p_{03} + p_{12})}{4} + 2\sigma_0 \sigma_2 p_{03} = 0.$$

Andrerseits wird für den bezüglichen Kegelschnitt-Schaar „H“ (67):

$$\gamma = \xi + \eta, \quad \delta = -\eta$$

also der Kegelschnitt selbst:

$$(77)\quad \xi F' + \eta(F' - F) = 0.$$

Endlich die projektivische Beziehung zwischen Büsc…he und Schaar „H“:

$$(78)\quad H' + \mu H = 0, \quad F' + \nu F = 0$$

gewinnt nach leichter Rechnung die Gestalt:

$$(79)\quad \mu\nu + \frac{\mu - \nu}{3} - 1 = 0.$$

98. Endlich mag noch der Vollständigkeit wegen a… …ch Büschel und Schaar „f“ (in analoger Bezeichnung) … gleichen Behandlung unterworfen werden, wenn auch die … züglichen Formeln bei weiteren Anwendungen in den Hint… grund treten.

Es genügt hier, dem Büschel den Normkegelschnitt u… den Kegelschnitt F' zu Grunde zu legen, da alle übrig… Formeln sich leicht, wenn man sie braucht, aus denen des „H… Büschels ergeben.

Für die „f“-Schaar gilt dann das dualistische.

Wir schreiben also das „f“-Büschel in der Form (cf.pg. 1…

$(a_1 = a_3 = 0)$:

$$(80)\quad \sigma_0^2 k' a_4 + \sigma_1^2 (k' a_2 - k) + \sigma_2^2 k' a_0 + 2\sigma_0\sigma_2 (k' a_2 + \ldots$$

$$= k' a_\sigma^2 + k(4\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2) = k' F' + k N_2 = 0$$

also in Liniencoordinaten:

$$(81)\quad u_0^2\, k'\, a_4\, (k'\, a_2 - k) + u_1^2 \{k'^2\, a_0\, a_4 - (k'\, a_2 + 2\, k)^2\}$$
$$+ u_2^2\, k'\, a_4\, (k'\, a_2 - k) - 2\, u_0\, u_2\, (k'\, a_2 - k)\, (k'\, a_2 + 2\, k)$$

und daher die mit N_2 gemeinsamen Tangenten:

$$(82)\quad k'\, [\lambda^4\, a_0\, (k'\, a_2 - k) + \lambda^2\, \{k'\, (a_0\, a_4 - 3\, a_2^2) - 6\, k\, a_2\}$$
$$+ a_4\, (k'\, a_2 - k)] = k' \left\{\frac{k'\, H}{2} - k\, f\right\} = 0$$

Analog wird die „f“ Schaar: (mit dualistischer Bezeichnung „Φ'“)“

$$(83)\quad u_0^2\, \rho'\, a_0 + u_1^2\, (4\, \rho'\, a_2 - \rho) + u_2^2\, \rho'\, a_4$$
$$+ 2\, u_0\, u_2\, (\rho'\, a_2 - \frac{\rho}{2}) = 0$$

also in Liniencoordinaten:

$$(84)\quad x_0^2\, \rho'\, a_4\, (4\, \rho'\, a_2 - \rho) + x_1^2\, \{a_0\, a_4\, \rho'^2 - (\rho'\, a_2 + \frac{\rho}{2})^2\}$$
$$+ x_2^2\, \rho'\, a_0\, (4\, \rho'\, a_2 - \rho) - 2\, x_0\, x_2\, (\rho'\, a_2 + \frac{\rho}{2})\, (4\, \rho\, a_2 - \rho) = 0$$

und ihr Schnitt mit N_2:

$$(85)\quad k'\, [\lambda^4\, (4\, \rho'\, a_0\, a_2 - \rho a_0) + \lambda^2\, \{4\, \rho'\, (a_0\, a_4 - 3\, a_2^2) - 6\, \rho\, a_2\}$$
$$+ (4\, \rho'\, a_2\, a_4 - \rho\, a_4) = k'\, (2\, H\, \rho' - f\, \rho) = 0.$$

(η_1) „Die Tangenten resp. Punkte, die das Büschel resp. die Schaar „f“:

$$(80)\ k'\, F' + k\, N_2 = 0,\ \text{resp.}\ (83),\ \rho'\, \Phi' + \rho\, N_2 = 0$$

mit N_2 resp. N_2 gemein haben, sind gegeben durch:

$$(82)\ \frac{k'\, H}{2} - k\, f = 0,\ \text{resp.}\ (83)\ 2\, H\, \rho' - f\, \rho = 0\ ^{*}).“$$

99. Diese sämmtlichen Formeln über die gemeinsamen Punkte resp. Tangenten der Schaaren f, H, resp. der Büschel

*) Umgekehrt hätte man auch mit zu grundelegung des Satzes (η_1), indem man die Form f mit H vertauscht und für letztere die bezüglichen Covarianten bildet, und dann in der Weise der Nr. 96 verfährt, die Formeln für Büschel und Schaar „H“ ableiten können.

f, H mit dem Normkegelschnitte lassen sich ohne Weiteres auf die linearen Complexe übertragen. Es mag hier genügen, den Satz mitzutheilen, der diese Uebertragung vollständig vermittelt.

Wir wissen, dass die Punkte irgend eines Kegelschnitts C der Ebene den (N_3) Sehnen eines Complexes C entsprechen (der dadurch vollständig bestimmt ist). Das Schnittpunktquadrupel (N_2, C) ist identisch mit dem Quadrupel der Tangenten von N_3, die dem Complexe C angehören.

Was entspricht den gemeinsamen Tangenten (N_2, C).

Den Schnittpunkten irgend einer Tangente λ von N_2 mit C: $(\lambda\alpha)$, $(\lambda\beta)$ entsprechen die beiden Sehnen von N_3, die vom Punkte λ ausgehen und dem Complex C angehören, durch die also die Ebene des Complexes, die durch den Punkt λ geht, vollständig bestimmt ist.

Durch das Zusammenfallen von α, β ergiebt sich daher:

k) „Den vier Tangenten λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) von N_2, die zugleich solche von C sind, entsprechen die vier Punkte a_i der cubischen Curve, deren durch den Complex C ihnen zugeordnete Ebenen die Curve berühren."

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir schon früher (pg. 115) kennen gelernt, wenn nemlich der Kegelschnitt C ein F-Kegelschnitt ist. Schneidet derselbe N_2 im Quadrupel f, so hat er mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein: andererseits war aber die Bedeutung von H für die cubische Curve die im letzten Satze allgemein angegebene.

100. Wir stellen die wichtigsten, einer eingehenderen Untersuchung zur Basis dienenden Kegelschnitte des „H"

Büschels und der „H"-Schaar in einer Tabelle zusammen, zugleich mit ihren Schnittpunkten und Tangenten, die sie mit dem Normkegelschnitt gemein haben (cf. Satz η):

Tabelle (86) *)

Binäre Form	„H"-Büschel.	„H"-Schaar.
f (1)	$H' + 3H$ (76)	F' } (50)
$jf - iH$ (40)	$3H' + H$	F } (50)
$2jf - 3iH$ (42)	H', } (17)	$F' - 3F$ }
$2jf + iH$ (46)	H } (17)	$3F' - F$ }
$2jf - iH$ (57)	$H' + H \equiv H_\sigma^2$ (17)	$F' + F \equiv H_u^2 \equiv \Phi$ } (51)
H (9)	$H' - H \equiv N_2$ (59)	$F' - F \equiv N_2$ } (51)

Daraus erkennt man unmittelbar, dass man die vier Kegelschnitte

$$H' + 3H, \; 3H' + H, \quad F' - 3F, \; 3F' - F,$$

abgesehen von den ihnen zugehörigen Formen, auch sehr einfach mittelst der andern einfacheren Kegelschnitte ausdrücken (resp. definiren) kann. Dies sprechen die Sätze aus:

λ) „Es sind folgende Kegelschnittpaare zu einander harmonisch

1) im Büschel „H":

$$(87) \begin{cases} (H' + 3H', N_2) & \text{und} \quad (H_\sigma^2, H) \\ (H + 3H', N_2) & \text{„} \quad (H_\sigma^2, H') \text{ und demnach auch:} \\ \hline (H' + 3H, H + 3H') & \text{„} \quad (H_\sigma^2, N_2) \end{cases}$$

2) in der Schaar „H":

$$(88) \begin{cases} (3F' - F, H_u^2) & \text{und} \quad (N_2, F') \\ (3F' - F', H_u^2) & \text{„} \quad (N_2, F) \text{ und demnach auch:} \\ \hline (3F' - F, 3F - F') & \text{„} \quad (N_2, H_u^2)\text{".} \end{cases}$$

*) Die nicht nummerirten Kegelschnitte erhält man leicht nach Formel (79).

101. Die Tabelle (86) zeigt ausserdem unmittelbar, dass die **dualistischen** Gegenbilder der Kegelschnitte

$$F', \ F, \quad H', \ H$$

keine andern sind, als

$$H' + 3\,H, \quad H + 3\,H', \quad F' - 3\,F, \quad F - 3\,F'.$$

Dies kann man aber auch leicht **direkt**, ohne Hilfe der zugehörigen binären Formen, nachweisen.

Denn es war H' der Kegelschnitt, der durch die Ecken aller der N_2 umschriebenen Dreiseite ging, deren Seiten (auf N_2) diejenige Involution dritter Ordnung bildeten, die zu der der ersten Polaren der Form f (1) conjugirt war.

Der zu H' dualistische Kegelschnitt wird demnach umhüllt sein von den Seiten der N_2 einbeschriebenen Dreiecke, deren Ecken (auf N_2) dieselbe Involution bilden, wie die Seiten der H' einbeschriebenen Dreiseite.

Dieser Involution gehörten zwei Elemente λ_1, λ_2 an unter der Bedingung (Gleichung des Kegelschnitts H')

$$(17) \quad \sigma_0^2\, p_{23} + \sigma_0\sigma_1\, p_{31} + \sigma_1\sigma_2\, p_{20} + \sigma_2^2\, p_{01} + \sigma_1^2\, p_{03} + \sigma_0\,\sigma_2\,(p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Wir suchen die Verbindungsgeraden der Punkte λ_1, λ_2, die dieser Relation genügen. Nun waren (cf. pg. 44) die Coordinaten einer Geraden (λ_1, λ_2):

$$(89) \quad \tau u_0 = \sigma_2, \quad \tau u_1 = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau u_2 = \sigma_0,$$

so dass der gesuchte Kegelschnitt dargestellt ist durch:

$$(90) \quad u_2^2\, p_{23} - 2\, u_2\, u_1\, p_{31} - 2\, u_0\, u_1\, p_{20} + u_0^2\, p_{01} + u_1^2\left(2p_{03} + \frac{2}{3}p_{12} + 2p_{03} - \frac{2}{3}p_{12}\right) + u_0 u_2\left(\frac{p_{12}}{3} + p_{03} + \frac{2p_{12}}{3} - 2p_{03}\right) = 0$$

oder nach (51) (59):

$$(91) \quad H_u^2 = \frac{2}{3}(3\,p_{03} - p_{12})\,(u_0\,u_2 - u_1^2) = H_u^2 - 2\sqrt{\frac{2i}{3}}\,N_2 = 0.$$

Nun war nach (50):

$$(50)\ H_u^2 \equiv \frac{F'+F}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{2i}{3}}N_2 \equiv F' - F, \text{ mithin}$$

$$(92)\ \begin{cases} H_u^2 - 2\sqrt{\frac{2i}{3}}\ N_2 \equiv \frac{3F-F}{2} \\ H_u^2 + 2\sqrt{\frac{2i}{3}}\ N_2 \equiv \frac{3F'-F}{2}. \end{cases}$$

Genau in derselben Weise gelangt man vom Kegelschnitt F' (50) zu dem dualistischen H' + 3 H (76), und durch Vertauschung von 3 p_{03} mit p_{12} (oder $+\sqrt{i}$ mit $-\sqrt{i}$) vom Kegelschnitt F zu H + 3 H'.

Dies möge durch den Satz hervorgehoben werden (mit Hülfe einer leichten Abkürzung):

μ) „Sind H', H die beiden Kegelschnitte, denen die *Dreiseite* zweier conjugirter Involutionen dritter Ordnung (auf einem Kegelschnitte N_2) *einbeschrieben* sind, und F', F die beiden andern, für die diese Dreiseite resp. Poldreiseite sind, so sind dualistisch $F' - 3F$, $F - 3F'$ die beiden Kegelschnitte, denen die *Dreiecke* derselben Involutionen (auf demselben Kegelschnitt N_2) *umbeschrieben* sind, und H' + 3 H, H + 3 H' die beiden andern, für die diese Dreiecke resp. Poldreiecke sind."

§. 23.

Fortsetzung und Schluss. Die Sehnen und Axen der cubischen Raumcurve.

102. Wir wollen am Schluss den bisher durchlaufenen Weg der Abbildung von Raum auf Ebene in der Weise kurz umkehren, dass wir zeigen, wie man von der allgemeinen Lehre der Raumgeraden (der H-Kegelschnitte in der Ebene)

... dem ursprünglichen Fundament der Abbildung ... zurückkehrt. Bei dieser Gelegenheit wird denn auch die Erklärung, wie sich die Covarianten einer cubischen Form ... dieser auf dem (Norm)Kegelschnitt verhalten, nachgeholt werden.

Die einem H-Kegelschnitt ein- und N_2 umschriebenen Dreiseite repräsentiren die Ebeneninvolution der entsprechenden Geraden H auf N_3. Daran schliesse sich hier beiläufig folgende Betrachtung.

Umgekehrt entsprechen dann den sämmtlichen Kegelschnitten, die einem festen, N_2 umschriebenen Dreiseit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ umschrieben sind, die sämmtlichen Geraden der Ebene, die aus N_3 die Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausschneidet. Lässt man beide Ebenen zusammenfallen, so hat man das bemerkenswerthe Resultat:

α) „Man kann bekanntlich die Punkte einer Ebene bei festem Fundamentaldreieck noch auf zweifach unendlich viele Weisen durch eine quadratische, ein-eindeutige, involutorische Verwandtschaft aufeinander beziehen (indem man z. B. einen ganz beliebigen Punkt der Ebene sich selbst entsprechen lässt).

Denkt man sich durch die Ecken des Fundamentaldreiecks eine sonst beliebige Raumcurve dritter Ordnung gelegt, so entsprechen jenen zweifach unendlich vielen *Transformationen* in der Ebene die zweifach unendlich vielen *Abbildungen* der cubischen Curve auf die Kegelschnitte, die man dem Fundamentaldreieck *einbeschreiben* kann."

Wir sind schon früher (Nr. 33) rein geometrisch zur Betrachtung dieser quadratischen Transformation geführt, und wiederholen hier nur die dortige Bemerkung, eine nähere Betrachtung derselben möge verschoben bleiben, bis sich in der

Theorie der biquadratischen Involution die Gelegenheit findet, sie an der ihr zukommenden Stelle zu untersuchen.

103. Wir fragen jetzt zunächst nach der Bedingung, unter der ein H-Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Die Gleichung von H' war:

$$(1)\quad \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_2(p_{12} - p_{03}) = 0$$

mithin seine Determinante:

$$(2)\quad \Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, \\ \frac{p_{20}}{2}, & p_{03}, & \frac{p_{31}}{2}, \\ \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, & \frac{p_{31}}{2}, & p_{23} \end{vmatrix} \quad \text{oder } 4\Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}-p_{03}}{3} \\ p_{20}, & 4p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix}$$

Es lässt sich aber $4\,\Delta'$ auch in folgende Form bringen:

$$(3)\quad 4\,\Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03}+p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} + (p_{12} - 3p_{03})(p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12})$$

wo der zweite Theil verschwindet.

Durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} würde sich daraus die Determinante Δ des Kegelschnitts H ergeben.

Nun war aber (3) die linke Seite der Gleichung (cf. Nr. 37 pg. 66) für die Geraden p_{ik}, die in einer Ebene der Normcurve liegen, also $\Delta = 0$ die Gleichung der Geraden p_{ik}, die die Normcurve treffen. Dies liefert:

β) „Zerfällt ein Kegelschnitt H in ein Linienpaar, so trifft die Gerade H die cubische Normcurve und umgekehrt; zerfällt dagegen der zu H conjugirte Kegelschnitt H', so liegt die Gerade H in einer Ebene der cubischen Curve (u. u.)."

104. Weiter ist aber leicht zu sehen, dass die eine Gerade eines Linienpaares H nothwendig Tangente von N_3 sein muss,

und umgekehrt eine Tangente von N_2 mit jeder Geraden der Ebene einen H-Kegelschnitt repräsentirt.

In der That, der Kegelschnitt H zerfalle in die Geraden u, v, so dass:

(4) $H = \eta_{i\sigma}^2 - (u_0\sigma_0 + u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2)(v_0\sigma_1 + v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2)$

so geht die Bedingung für die Coefficienten η_{ik} (d. i. die Bedingung, dass der Kegelschnitt $\eta_{i\sigma}^2$ ein H-Kegelschnitt ist (cf. pg. 99))

$$(5)\quad \eta_{00}\,\eta_{22} - 4\,\eta_{01}\,\eta_{12} + \eta_{11}\,(2\,\eta_{02} + \eta_{11}) = 0$$

über in

$$(6)\quad (u_0\,u_2 - u_1^2)\,(v_0\,v_2 - v_1^2) = 0. \quad \text{q. e. d.,}$$

also lautet die Ergänzung von (β):

β_1) „Die Geraden, die die cubische Curve treffen, entsprechen den Linienpaaren H der Ebene, d. i. den Linienpaaren, deren eine Gerade N_2 berührt."

In der That folgt ja Satz (β_1) aus (β), wenn man nur berücksichtigt, dass wenn eine Raumgerade die cubische Curve trifft, von den vier die Gerade treffenden Tangenten der Curve zwei coincidiren.

Man kann aber auch beide Sätze (β) (β_1) geometrisch unmittelbar einsehen, vermöge der Fundamentalbedeutung eines H-Kegelschnitts.

Denn einem Linienpaar kann ein Dreieck nur so einbeschrieben sein, dass entweder eine Seite des Dreiecks mit einer der beiden Geraden des Paares coincidirt, oder zwei Seiten des Dreiecks mit den beiden Geraden. Der zweite Fall ist offenbar nur ein Specialfall des ersten.

Soll nun das Dreieck, wie für einen H-Kegelschnitt erforderlich, ausserdem dem Normkegelschnitt N_2 umschrieben sein, so folgen daraus die beiden gesuchten Sätze.

105. Sei nun die Tangente von N_2 „τ", und die weitere Gerade, die mit ihr den H-Kegelschnitt bildet, (α, β), so zerfällt die zugehörige H-Involution (dritter Ordnung) in den festen Faktor ($\lambda-\tau$) und eine gewöhnliche mit den Doppelelementen α, β.

In der That haben ja die Ebenen durch die Raumgerade H mit der Curve N_3 einen festen Punkt (τ) gemein. Der Geraden (α, β) in der Ebene entsprechen die Geraden der Fläche zweiter Ordnung, die durch N_3 und die Gerade H geht, und zwar der Schaar, der H nicht angehört. Die beiden Tangentenebenen durch H an diese Fläche sind auch solche an die Curve, und zwar berühren sie in den Punkten α, β.

Die zur obigen conjugirte Involution (d. i. die Punktinvolution der Geraden H) enthält den Cubus eines linearen Faktors ($\lambda-\tau$).

Unter den Dreiecken, die dem conjugirten Kegelschnitt H' (entsprechend der conjugirten Geraden H', die in der Ebene τ von N_3 liegt) einbeschrieben sind (und N_2 umbeschrieben) befindet sich demnach speciell die dreifach zählende Tangente τ.

106. Soll nun die Raumgerade H die Curve N_3 noch einmal treffen, d. h. Sehne sein, so müssen α, β coincidiren (in τ'), und der bezügliche H-Kegelschnitt besteht dann aus dem Tangentenpaar τ, τ' (von N_2), und umgekehrt muss jedes Tangentenpaar von N_2 einer Sehne von N_3 entsprechen.

γ) „Dies ist aber die ursprüngliche Abbildung von Raum auf Ebene, nach der einem Punkte der Ebene (vermöge seines an N_2 gehenden Tangentenpaares) eine Sehne der cubischen Curve entsprach u. u."

Die näheren Beziehungen der in diesem Falle vorhandenen Kegelschnitte H' H, F', F zu den bezüglichen Complexen

sind schon früher besprochen *), so dass hier nur einige Ergänzungen Platz finden mögen, die sich im Wesentlichen auf die den Axen der cubischen Curve entsprechenden H-Kegelschnitte beziehen.

Die einer Axe $(\tau\tau')$ zugehörige Ebeneninvolution enthält die beiden Cuben $(\lambda-\tau)^3$ und $(\lambda-\tau')^3$, setzt sich also aus ihnen linear zusammen. Dann gehört bekanntlich jede cubische Form φ, deren Hesse'sche Covariante Δ die Wurzeln τ, τ' besitzt, der Involution an, oder, wenn φ irgend ein Tripel der Involution, so ist sie dargestellt durch

$$(7)\quad \varphi + k\,Q$$

wo Q die cubische Covariante von φ ist:

δ) „Den Axen der cubischen Curve N_3 entsprechen alle die H-Kegelschnitte, deren zugehörige (N_2 umschriebene) Dreiseite eine Involution (7) besitzen" oder auch: „den Axen entsprechen alle *nicht zerfallenden*, N_2 an zwei Stellen berührenden H-Kegelschnitte."

107. Wie construirt man daher von dem gegebenen Punktepaar $(\tau, \tau') = \Delta$ aus die Involution (7) oder, was dasselbe ist, zu einer cubischen Form φ ihre Covarianten Δ und Q?

Dies ergiebt sich sofort mit Hülfe der Fundamentaleigenschaft des (Norm-)Kegelschnitts, dass die Punkte (Strahlen) einer Geraden (Punktes) (α, β) eine Involution mit den Doppelelementen α, β bilden.

Denn benützt man die bekannte Beziehung von Q und Δ zu f, dass jede der Wurzeln von Q mit den drei Wurzeln φ ein harmonisches Quadrupel bildet, und dass die Wurzeln von Δ die Doppelelemente einer Involution sind, der je eine Wurzel von φ mit einer zugehörigen von Q zusammen angehören, so hat man[36] (cf. Sturm, Crelle 86, pg. 121 ff.):

*) Insbesondere vergleiche man die Tabelle (86) (der Nr. 100) mit den Resultaten der Nummern 63, 64.

ε) „Stellt man die cubische Form φ durch drei Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von N_2 dar, so treffen die Verbindungslinien der Ecken dieses Dreiseits mit den Berührungspunkten der resp. Gegenseiten N_2 im Punkttripel Q und diese drei Verbindungsgeraden treffen sich im Punkte Δ.

Ebenso gilt die dualistische Construction."

108. Für Δ war das Resultat schon in der Nr. 34 implicite enthalten. Denn drücken wir das dort erhaltene Ergebniss dualistisch aus, so heisst es: „In einer Ebene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ liegt eine Axe der Curve N_3, deren Ebenen α, β durch die Covariante Δ der cubischen Form gegeben sind, deren Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind."

Diese Axe ist nun offenbar die (einzige eigentliche) Doppeltangente der Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die den Schnitt unserer Ebene mit der Tangentenfläche der Curve N_3 bildet.

Dieser Doppeltangente und Axe entspricht nun nach der angegebenen Nummer (cf. auch Satz α) der Kegelschnitt der Ebene, der durch die Ecken des Dreiecks $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ (das N_2 umschrieben ist) geht und den Normkegelschnitt zweimal berührt.

q. e. d.

109. Mit den weiteren Ausnahmefällen der H-Kegelschnitte wollen wir uns nicht aufhalten, sie sind ohne Mühe angebbar; es wird vielmehr hohe Zeit, dass wir uns unserem Hauptabschnitt, der Theorie der Involutionen vierter Ordnung, zuwenden, zu der wir alsobald gelangen, sobald wir statt der (H-)Kegelschnitte durch die Ecken eines N_2 umschriebenen Dreiseits diejenigen durch die Ecken eines ganz beliebigen Dreiecks substituiren.

Daraus wird sich dann ergeben, dass die projektivischen Theorien der rationalen ebenen Curve vierter Ordnung, ferner

der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung (sofern man sie als Jacobi'sche Curve eines Kegelschnittnetzes auffasst), sowie der allgemeinen quadratischen involutorischen Transformation in der Ebene, endlich auch die Theorie zweier cubischer Curven im Raume, um unwichtigere hier nicht zu erwähnen, mit der angekündigten Theorie der biquadratischen Involution in gewissem Sinne identisch sind, woraus denn eine grosse Zahl, theils schon bekannter, meistens aber neuer Eigenschaften der in Rede stehenden Gebilde fliessen wird; namentlich in dem Sinne der (erweiterten) ternären und dann auch der quaternären Apolaritätstheorie.

Ehe wir aber dieses Gebiet in Angriff nehmen, möge noch die Theorie einer biquadratischen Form, die uns bisher beschäftigte, in der Weise abgerundet werden, dass auch die Darstellung auf der biquadratischen Normcurve, soweit es nöthig ist, um den Zusammenhang mit dem Bisherigen deutlich hervortreten zu lassen, berücksichtigt werden soll.

§. 24.

Darstellung der binären biquadratischen Form auf der biquadratischen Normcurve.

110. Aus dem Hauptsatze des §. 13 geht einmal hervor, dass die Form

$$(1)\quad x_0\lambda^4 - x_1\lambda^3 + x_2\lambda^2 - x_3\lambda + x_4 = 0$$

einen Punkt im Raume von vier Dimensionen, mit den Coordinaten x_i darstellt, bezogen auf die zugehörige Normcurve:

$$(2)\quad \lambda^4 : 4\lambda^3 : 6\lambda^2 : 4\lambda^1 : 1 = x_4 : x_3 : x_2 : x_1 : x_0$$

sodann aber auch, dass jedes Punktquadrupel (s_i) der Curve, dessen Verbindungsraum *) ($u_x = 0$) durch den Punkt x_i (1) geht, der Bedingung:

---

*) d. h. der Raum, der die vier Punkte des Quadrupels enthält.

$$(3)\ x_0 s_4 - \frac{x_1}{4} s_3 + \frac{x_2}{6} s_2 - \frac{x_3}{4} s_1 + x_4 s_0 = 0$$

genügt (wie auch umgekehrt, dass durch (3) sämmtliche Punktquadrupel der Curve von der angegebenen Art dargestellt sind).

In der That zeigen ja die damaligen Entwicklungen (cf. besonders die Anmerkung pg. 49), dass die Coordinaten u_i eines Raumes $u_x = 0$, der aus der Curve ein Punktquadrupel s_i ausschneidet, mittelst der Gleichungen bestimmt sind:

$$(4)\ u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = s_4 : -\frac{s_3}{4} : \frac{s_2}{6} : -\frac{s_1}{4} : s_0$$

so dass die Gleichung (3) mit der Gleichung des Punktes x_i „$u_x = 0$" (wo aber jetzt die x_i fest und die u_i variabel zu denken sind) identisch wird.

111. Der bequemeren Anschauungs- und Ausdrucksweise halber möge statt der Betrachtung der Form (1) auf der Curve (2) die derselben Form auf der vom Punkte (1) in einen beliebigen Raum $v_x = 0$ „projicirten" Curve (2) zu Grunde gelegt werden.

Diese[37] „Projektion" geht einfach (ganz analog einer solchen im gewöhnlichen Raume von einem Punkte auf eine Ebene) so vor sich, dass alle durch den Punkt (1) gehenden Räume $u_x = 0$ (die als specielle Schnittgebilde alle Strahlen vom Punkte (1) an die Curve (2) d. h. ihren „Projektionskegel" enthalten) mit einem festen, beliebig (doch so, dass er zum Punkte und zur Curve keine specielle Lage einnimmt) gewählten Raume $v_x = 0$ geschnitten werden, wodurch die Räume $u_x = 0$ in die Ebenen des Raumes $v_x = 0$ und die Strahlen des „Projektionskegels" in die Punkte einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung übergehen, für die also irgend vier Punkte dann (und nur dann) auf einer Ebene liegen, wenn sie (d. h. ihre Argumente) der Bedingung (3) genügen.

Da jedes Quadrupel (3) zur Form (1) apolar ist, so folgt hieraus sofort, dass auf ein ganz beliebiges Coordinatensystem im Raum $v_x = 0$ bezogen, unsere Curve dargestellt ist durch das System:

$$(5)\quad \sigma y_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

wo die φ_i der einen Bedingung zu genügen haben, irgend vier (linear unabhängige) zu (1) apolare Formen vierten Grades zu sein d. h. umgekehrt, wo die Form (1) die zur Gruppe der φ_i conjugirte Form ist.

(Dann sind nach Früherem die Coefficienten x_i in (1) die vierreihigen Determinanten des Coefficientensystems der φ_i die sich also bei einer Collineation des Raumes $v_x = 0$ nur um einen Faktor ändern.)

„Umgekehrt stellen die binär-invarianten Eigenschaften der Form (1) (die zusammenfallen mit den combinant-invarianten Eigenschaften der φ_i) diejenigen quaternär-invarianten Eigenschaften unserer Raumcurve (5) dar, die identisch sind mit denjenigen quinär-invarianten Eigenschaften der Normcurve (2), die sich bei ihrer Projection vom Punkte (1) aus (in einen beliebigen Raum $v_x = 0$) nicht ändern.“

112. Wir schreiben wieder, um die Gleichförmigkeit mit den vorigen Paragraphen dieses Abschnitts zu wahren, statt (1), (3):

$$(6)\quad a_\lambda \equiv a_0\lambda^0 + 4a_1\lambda^1 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 = 0$$

$$(7)\quad a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0$$

Aus der Erzeugung der Form (6) aus (7) erkennt man zunächst sofort[38]):

α) „Die Form $a_\lambda = 0$ stellt (in diesem Paragraphen) die vier Punkte der Curve (5) dar, in denen eine Ebene vier consecutive Punkte mit der

Curve gemein hat (oder kürzer ihre vier „Undulationspunkte“) und umgekehrt hätte man den Titel dieses Paragraphen durch diese Definition der Form a_λ ersetzen können.“

Da a_λ nur dann zu sich selbst apolar ist, wenn ihre Invariante i verschwindet, so haben wir[39]:

„Die vier Undulationspunkte der Curve (5) liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn die Invariante i ihrer Form a_λ verschwindet.“

Im allgemeinen ist durch drei Punkte der Curve $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der vierte (λ_4) eindeutig bestimmt, der mit ihnen auf einer Ebene liegt. Liegen aber die drei ersten in einer Geraden (die also dann eine dreifache Sehne der Curve ist), so wird der vierte (λ_4) unbestimmt d. h. die Argumententripel (σ_i) der dreifachen Sehnen sind gegeben durch:

$$(8) \begin{cases} A_1 \equiv a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3 = 0 \\ A_2 \equiv a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

das heisst (cf. Nr. 50):

β) „Die zur Involution der ersten Polaren von a_λ conjugirte Involution (8) stellt die dreifachen Sehnen der Curve dar.“

Wir geben diesem Satze noch eine andere Form, indem wir ausdrücken, wann eine Sehne (λ_1, λ_2) der Curve diese noch einmal trifft.

Dann haben wir aus den Gleichungen (8) oder anders geschrieben:

$$(9) \begin{cases} A_1 \equiv (a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2) + \lambda_3\,(a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2) \\ A_2 \equiv (a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2) + \lambda_3\,(a_2\,\tau_0 + a_3\,\tau_1 + a_4\,\tau_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \equiv A_{11} + \lambda_3\,A_{12} = 0 \\ \equiv A_{21} + \lambda_3\,A_{22} = 0 \end{cases}$$

λ_3 zu eliminiren und erhalten den Satz (cf. Nr. 51):

β_2) „Die Sehne λ_1, λ_2 (τ_1) trifft die Curve noch einmal unter der Bedingung:

$$(10)\ \mathrm{H}_\tau = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

113. Excurs. Diese dreifachen Sehnen bilden bekanntlich (cf. Nr. 13) die eine Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung, der einzigen, die durch die Curve geht. Projicirt man nun, ganz wie oben, unsere Curve von irgend einem Raumpunkte aus auf eine Ebene, so erhält man in dieser eine rationale Curve vierter Ordnung, für die vier Punkte in einer Geraden liegen, wenn sie zwei Bedingungen:

$$(11)\quad a_s = 0,\quad b_s = 0$$

genügen. Soll aber der Projektionspunkt auf einer dreifachen Sehne liegen, so erhält die ebene Curve einen dreifachen Punkt.

Andrerseits wird aber für diesen ein vierter Punkt (λ_4) in den Gleichungen (11) unbestimmt d. h. es finden die Relationen statt:

$$(12)\ \begin{cases} a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3 = 0 \\ a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3 = 0 \\ b_0\,\sigma_0 + b_1\,\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\,\sigma_3 = 0 \\ b_1\,\sigma_0 + b_2\,\sigma_1 + b_3\,\sigma_2 + b_4\,\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

und dies geschieht unter der Bedingung:

$$(13)\ B = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist also die Bedingung des dreifachen Punktes der ebenen (der dreifachen Sehne der Raum-)Curve. In der That lassen sich (cf. Salmon, Höhere Algebra art. 220), wenn $B = 0$, die beiden Formen

(14) a_λ, b_λ

als lineare Combinationen derselben drei vierten Potenzen darstellen, woraus unter Bildung von a_s, b_s die Existenz des dreifachen Punktes sofort ersichtlich ist. (Dann sind auch a_λ, b_λ als Polaren einer Form fünften Grades darstellbar, worauf später noch zurückgekommen wird.)

Schreibt man B mit Hülfe des Grassmann'schen Satzes (§. 1) in den Coefficienten der zu a_λ, b_λ conjugirten Gruppe, so kommt man thatsächlich auf die Form der Nr. 13 zurück, die nur in der dort angegebenen Weise zu ändern ist, um zur Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten zu gelangen.

114. Kehren wir zurück zu Gleichung (10), so wird die Sehne λ_1, λ_2, die noch einmal trifft, zur Tangente, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ wird, wodurch H_τ in die Hesse'sche Form H von a_λ übergeht.

Setzt man andrerseits in (9) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und eliminirt dann λ, so gelangt man zu den Restpunkten $\lambda_3 = \rho$ dieser Tangenten. Diese Elimination lieferte (cf. Nr. 57) die Covariante:

$$(9)\ P = 3\,j\,f - 2\,i\,H = 0$$

und man hat somit:

γ) „Unter den dreifachen Sehnen unserer Curve (5) giebt es vier Tangenten λ (mit den Restpunkten ρ): dann sind die λ die Wurzeln der Hesse'schen Form H von a_λ, und die ρ die Wurzeln der Covariante (9) P."

115. Soll die Invariante j von a_λ verschwinden (cf. Nr. 55) so giebt es ein Werthepaar δ_1, δ_2 (τ_i) das die Gleichungen:

$$(10)\ \begin{cases} A_{11} \equiv a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2 = 0 \\ A_{12} \equiv a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2 = 0 \\ A_{22} \equiv a_2\,\tau_0 + a_3\,\tau_1 + a_4\,\tau_2 = 0 \end{cases}$$

befriedigt, also mit jedem Werthepaar λ_1, λ_2 zusammen ein auf einer Ebene liegendes Punktquadrupel der Curve bildet und somit einen eigentlichen Doppelpunkt der Curve darstellt. Dann würde H das Quadrat einer quadratischen Form (deren Wurzeln eben δ_1, δ_2 sind). In der That werden ja die dreifachen Sehnen dann die Kanten des Kegels zweiter Ordnung, der die Curve vom Doppelpunkte aus projicirt und es ist evident, dass die Tangenten (cf. γ), die die Curve noch einmal treffen, keine anderen sein können, als die Tangenten des Doppelpunktes selbst. Somit gilt der Satz[40]:

δ_1) „Wenn $j = 0$ (und nur dann), besitzt die Curve (5) einen eigentlichen Doppelpunkt δ_1 δ_2. Dann wird sowohl H als P gleich Δ^2, wo δ_1, δ_2 die Wurzeln der quadratischen Form Δ sind, und zwar stellt genauer H die Tangenten des Doppelpunktes, P die in ihnen liegenden beiden Punkte dar."

Man kann die Argumente 0, ∞ als die des Doppelpunktes wählen, was vermöge der linearen Transformation

$$(11)\quad \lambda' = k\,\frac{\lambda-\delta_1}{\lambda-\delta_2}$$

geschieht und zugleich k so bestimmen, dass a_λ die einfache Form annimmt:

$$(12)\quad a_\lambda = \lambda^4 - 1.$$

Dann wird

$$(13)\quad a_s = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - 1 = 0.$$

Im allgemeinen dagegen wird

$$(14)\quad a_\lambda = (\lambda-\delta_1)^4\, d_1 + (\lambda-\delta_2)^4\, d_2$$

und

$$(15)\quad a_s = \psi(\delta_1)\, d_1 + \psi(\delta_2)\, d_2 = 0$$

wo

$$(16)\quad \psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4).$$

116. Rücken die Argumente δ_1, δ_2 zusammen, so wird der pelpunkt zur Spitze. Wir wollen die Invariantenbedingung ir in verschiedener Form aufstellen.

Sei vorläufig noch δ_1, δ_2, so kann man zunächst aus je der drei Gleichungen (10) die aus δ_1, δ_2 gebildeten Funkn τ_i berechnen.

Führen wir drei unbestimmte Faktoren ρ_2, ρ_1, ρ_0 ein, so lten wir zuvörderst:

$$\begin{cases} \rho_2 \tau_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} & -\rho_2 \tau_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} & \rho_2 \tau_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ \rho_1 \tau_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & -\rho_1 \tau_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} & \rho_1 \tau_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ \rho_0 \tau_0 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & -\rho_0 \tau_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & \rho_0 \tau_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

n zwischen den ρ die Relationen:

$$(18)\ \rho_1 = -\frac{\rho_0 \tau_1}{\tau_0},\ \rho_2 = \frac{\rho_0 \tau_2}{\tau_0}$$

umgekehrt aus (17) (18):

$$)\begin{cases} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \rho_0 \tau_0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -\rho_0 \tau_1, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \rho_0 \tau_2 \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{\rho_2 \tau_2^2}{\tau_0}, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\frac{\rho_0 \tau_1 \tau_2}{\tau_0}, \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \frac{\rho_0 \tau_1^2}{\tau_0}. \end{cases}$$

Die Bedingung für das Coincidiren der Werthe δ_1, δ_2

$$(20)\ 4 \tau_0 \tau_2 - \tau_1^2 = 0$$

et daher nach (19)

$$(21)\ 4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 0 = -\frac{i}{2}.$$

Andrerseits werden dann aus den Gleichungen (19), wenn s Argument der Spitze bezeichnet, die folgenden:

$$(22)\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \rho_0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -2\,\rho_0\,\delta, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \rho_0\,\delta_2 \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \rho_0\,\delta^4, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -2\,\rho_0\,\delta^3, \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 4\,\rho_0\,\delta \end{array}\right.$$

woraus sofort folgt, dass die Hesse'sche Form von a_λ übe
geht in

$$(23)\quad H \equiv \rho_0\,(\lambda-\delta)^4.$$

Dies liefert zunächst:

δ_2) „Ist $i = 0$ und $j = 0$ (und nur dann), so b sitzt die Curve (5) eine Spitze, die vierfach g rechnet die Hesse'sche Form von a_λ bildet, dass ihr Argument aus irgend zwei der Gleic ungen (22) berechnet werden kann."

Wenn aber i und j verschwinden, so hat bekanntlich einen dreifachen Faktor

$$(24)\quad a_\lambda \equiv (\lambda-\delta)^3\,(\lambda-\varepsilon)$$

(Denn da dann auch die Discriminante von a_λ verschwin det, so ist es erlaubt, eine canonische Form für a_λ einzuführen, in der $a_0 = a_1 = 0$. Dann aber muss wegen $i = 0$ auch a_2 verschwinden.)

Nimmt man δ einmal $=0$, das anderemal $=\infty$, so gelangt man zu zwei Normalformen von a_λ, denen folgende beiden Normalformen der zugehörigen Form a_s entsprechen:

$$(25)\quad \begin{array}{l} \text{I}\;\; k_4\,s_4 + k_3\,s_3 = 0 \\ \text{II}\;\; k_0\,s_0 + k_1\,s_1 = 0 \end{array}$$

Aus I geht wieder die allgemeine Form für die Spitze hervor:

$$(26)\; K_4\,(\lambda_1-\delta)\,(\lambda_2-\delta)\,(\lambda_3-\delta)\,(\lambda_4-\delta)$$
$$+ K_3\,[(\lambda_1-\delta)\,(\lambda_2-\delta)\,(\lambda_3-\delta) + (\lambda_1-\delta)\,(\lambda_2-\delta)\,(\lambda_4-\delta)$$
$$+ (\lambda_1-\delta)\,(\lambda_3-\delta)\,(\lambda_4-\delta) + (\lambda_2-\delta)\,(\lambda_3-\delta)\,(\lambda_4-\delta)] = 0$$

oder einfacher

$$(26') \; K_4 + K_3 \left[\frac{1}{\lambda_1 - \delta} + \frac{1}{\lambda_2 - \delta} + \frac{1}{\lambda_3 - \delta} + \frac{1}{\lambda_4 - \delta}\right] = 0$$

Diese Gleichungen werden noch mehr vereinfacht, wenn man der einen noch übrig bleibenden Undulationsebene das Argument ∞ resp. 0 beilegt. Dann gehen dieselben über in:

$$(25)' \begin{cases} \text{I} & s_3 = 0 \\ \text{II} & s_1 = 0 \end{cases}$$

$$(26'') \; \frac{1}{\lambda_1 - \delta} - + \frac{1}{\lambda_2 - \delta} - + \frac{1}{\lambda_3 - \delta} - + \frac{1}{\lambda_4 - \delta} = 0$$

Dies drücken wir in einem besonderen Satze so aus:

δ_3) „Rücken drei der vier Undulationsebenen der Curve (5) zusammen, so wird ihr gemeinsamer Punkt zur Spitze (und umg.); hat diese das Argument δ, so geht die Bedingung, dass vier Curvenpunkte in einer Ebene liegen, in die Form über:

$$(27) \; \sum_1^4 \frac{1}{\lambda_1 - \delta} = \text{const.}$$

wo die rechts stehende Constante verschwindet, wenn man (was immer erlaubt ist) der vierten Undulationsebene das Argument ∞ beilegt.

Legt man ausserdem zugleich (was gleichfalls erlaubt ist) der Spitze das Argument 0 bei, so geht (27) über in

$$(28) \; s_3 = 0$$

oder bei Vertauschung der Argumente 0, ∞ in

$$(28') \; s_1 = 0.\text{“}$$

117. Nun gelingt es aber auch ohne Mühe, diesen Satz unmittelbar und continuirlich aus der Gleichung (15) $a_n = 0$, die für den Fall eines Doppelpunktes δ_1, δ_2 galt, abzuleiten, indem man δ_1 sich δ_2 immer mehr nähern lässt.

Schreiben wir sie etwas anders:

$$(15)\quad \psi(\delta_1) - D\,\psi(\delta_2) = 0$$

oder auch, wenn

$$(16)\quad \delta_2 - \delta_1 = \Delta \text{ gesetzt wird}$$

in folgender Form:

$$(15)\quad \frac{\psi(\delta_1) - D\,\psi(\delta_1 + \Delta)}{\Delta} = 0,$$

so bemerken wir, dass sich D zugleich mit kleiner werdend[illegible]m Δ der Eins nähert und in diese übergeht, falls Δ verschwin[illegible]t, d. h. die linke Seite wird dann der Differentialquotient von ψ [illegible]$_1$) nach δ_1:

$$(29)\quad \frac{d\,\psi(\delta_1)}{d\,\delta_1} = 0 \quad \text{oder kürzer } \psi'(\delta_1) = 0,$$

oder auch nach Division mit $\psi(\delta_1)$

$$(30)\quad \frac{\psi'(\delta_1)}{\psi(\delta_1)} = \frac{d\,lg\,\psi(\delta_1)}{d\,\delta_1} = 0$$

was sofort zu Gleichung (26″) führt, von der man dann wie[illegible]er zu (27) gelangt.

118. Excurs. Clebsch[41] schlägt ein ähnliches Verfahren [illegible]ein für die rationalen ebenen Curven, nur dass er seine Betra[illegible]ht-ungen an die Abel'schen Integrale der rationalen Curve anleh[illegible]nt, was wie man aus Obigem erkennt, durchaus unnöthig ist.

Es mag bei dieser Gelegenheit der Zusammenhang bei[illegible]der Betrachtungen kurz erörtert werden.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns gleichf[illegible]ll auf die ebenen rationalen Curven (obgleich dieselbe [illegible]Be-trachtung für j e d e rationale Curve gilt). Sei eine solche [illegible]ge-geben durch:

$$(31)\quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\,\lambda^n + \ldots a_{in}$$

so kann man stets die lineare Transformation ausgefü[illegible]rt denken, durch die irgend einer der Doppelpunkte die Ar[illegible]u-mente 0, ∞ erhält. Dann müssen aber nothwendig die [illegible]e-ziehungen herrschen

$$(32)\ \tau a_{io} = a_{in}$$

was zur Folge hat, dass eine der Schnittpunktgleichungen, wenn sie nach §. 2 abgeleitet werden, in die Form übergeht:

$$(33)\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = \tau.$$

Daraus folgt, wenn man sich die angewandte lineare Transformation wieder rückwärts ausgeführt denkt, dass sich das ganze System der Schnittpunktgleichungen ersetzen lässt durch das andere:

$$(34)\ \frac{(\lambda_1-\alpha_i)(\lambda_2-\alpha_i)\ldots(\lambda_n-\alpha_i)^{*)}}{(\lambda_1-\beta_i)(\lambda_2-\beta_i)\ldots(\lambda_n-\beta_i)} = \tau_i \text{ oder } \psi(\alpha_i)-\tau_i\,\psi(\beta_i) = 0$$

wo (34) aus so viel Gleichungen besteht, als Doppelpunkte α_i, β_i, vorhanden sind. (Die Constanten τ_i sind dann leicht nach Clebsch mittelst der Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch alle Doppelpunkte, immer einen ausgenommen, hindurchgehen, in ihrer Abhängigkeit von den α_i β_i darzustellen.)

Lässt man nun den Doppelpunkt zur Spitze werden, d. h. rücken α_i, β_i zusammen in r, so geht nach unserm obigen Verfahren (34) über in die andere

$$(35)\ \sum_1^n{}^k \frac{1}{\lambda_k - r} = \text{const.} = 0$$

oder speciell (36) $s_1 = 0$ resp. $s_{n-1} = 0$.

In der That ist ja die Verbindungslinie der Punkte mit den homogenen Coordinaten a_{i0}, a_{i1}, die Tangente des Punktes ∞: diese wird aber unbestimmt (und nur dann) wenn der Punkt ∞ eine Spitze wird, andererseits aber, wenn die beiden angegebenen Punkte identisch werden. Dann aber erhält man nach §. 2 als eine der Gleichungen (34):

*) Andrerseits ist diese Form a priori angebbar. Denn da jede der Schnittpunktgleichungen linear und symmetrisch ist und ferner, wenn α_1 β_1 ein Doppelpunkt, eine der Gleichungen für $\lambda_r = \alpha_1$, $\lambda_s = \beta_1$ (r, s, $= 1, 2, \ldots n$) identisch erfüllt werden muss, so kann sie nur die Form (34) besitzen.

$$s_{n-1} = \text{const.}$$

Das Entsprechende gilt für das Argument 0.

Wir gelangen nun zur Clebsch'schen Methode, wenn wir:

$$(37)\quad lg\,(\lambda-\alpha_i) = \mu^{(i)},\quad lg\,(\lambda-\beta_i) = \nu^{(i)},\quad lg\,\tau_i = \Delta_i$$

setzen. Dann erhalten wir im allgemeinen durch Logarithmirung von (34)

$$(38)\quad \frac{\mu_1^{(i)}}{\nu_1^{(i)}} + \frac{\mu_2^{(i)}}{\nu_2^{(i)}} + \cdots \frac{\mu_n^{(i)}}{\nu_n^{(i)}} = \Delta_i + 2\,\varkappa\pi i \text{ oder } \equiv \Delta_i \pmod{2\,\pi i}$$

oder wenn nach

$$(39)\quad lg\,\frac{\lambda-\alpha_i}{\lambda-\beta_i} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{(i)} = \zeta^{(i)}$$

gesetzt wird,

$$(38')\quad \Sigma\,\zeta^{(i)} \equiv \Delta_i.$$

Dies ist die erste (Integral-) Form von Clebsch (für den Doppelpunkt $\alpha_i\,\beta_i$). Schreiben wir jetzt (38) etwas anders:

$$(40)\quad \sum_k \mu_k^{(i)} \equiv \Delta_i \sum_k \nu_k^{(i)}$$

und lassen nunmehr α_i und β_i sich nähern, so nähert sich Δ_i der Grenze 0 und wir haben für $\alpha_i = \beta_i$

$$(41)\quad \sum_k \mu_k^{(i)} \equiv 0.$$

Dies ist die zweite (Integral-) Form von Clebsch (für die Spitze α_i). Durch Differentiation gelangt man wieder zu den Formen (34) (35) zurück.

In der That denkt man sich, wie häufig geschieht, die rationalen Curven continuirlich aus solchen vom Geschlecht 1 (den elliptischen Curven) entstanden, so werden durch diesen Process die auf die Doppelpunkte der elliptischen Curve bezüglichen elliptischen Integrale dritter Gattung zu Logarithmen, d. h. man gelangt von den Gleichungen des Abel'schen Theorems, nach denen die Summe von n Werthen eines solchen Integrales, bezogen auf die n Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden, einer Constanten (abgesehen von Perioden)

gleich ist, continuirlich zu Gleichung (38′) und dadurch zu (34). Man kann also sagen:

„**Durch die Substitution** (37) „$\lambda - \alpha_i = e^{\mu i \alpha}$ **gehen die Gleichungen des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven über in die des Abelschen Theorems für dieselben.**“

Für Raum- (und höhere) rationale Curven treten Doppelpunkte im **Allgemeinen** nicht mehr auf, so dass dann auch die Form (38) resp. (34) nicht mehr möglich ist, dafür werden wir aber, wie sich später zeigen wird, in vollständiger Analogie mit der Ebene, die vierfachen Sehnen (und entsprechend in höheren Räumen die sechsfachen Ebenen etc. der Curven) einführen. Ist eine solche vierfache Sehne einer Raumcurve durch die Argumente

$$\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4$$

bestimmt, so lauten stets **zwei** der Schnittpunktgleichungen der Curve:

$$(42)\begin{cases} d_1\,\psi(\delta_1) + d_2\,\psi(\delta_2) + d_3\,\psi(\delta_3) + d_4\,\psi(\delta_4) = 0 \\ d'_1\,\psi(\delta_1) + d'_2\,\psi(\delta_2) + d'_3\,\psi(\delta_3) + d'_4\,\psi(\delta_4) = 0 \end{cases}$$

u. s. f.

119. Von der Covariante Θ wurde pg. 117 gezeigt, dass ihre drei Wurzelpaare ε_i, η_i $(i = 1, 2, 3)$ die Eigenschaft haben, dass sowohl $\varepsilon_i^3\,\eta_i$, als $\varepsilon_i\,\eta_i^3$ ein zu a_λ apolares Quadrupel bilden d. h. die Gleichung $a_\lambda = 0$ befriedigen (und dass umgekehrt dies die drei einzigen Werthepaare *) der Art sind). Dies giebt den Satz:

ε) „**Die Covariante Θ stellt die drei (eigentlichen) Sehnen der Curve dar, die zugleich Axen (Linien zweier Osculationsebenen) derselben sind.**“

*) Mit getrennten Elementen, denn uneigentliche Werthepaare der Art (mit zusammenfallenden Elementen) sind ja durch $\lambda_i\,\lambda_i$ gebildet, wo λ_i eine Wurzel von a_λ ist.

120. Endlich fällt ein Berührungspunkt der Tangenten (cf. γ), die noch einmal treffen, mit seinem Restpunkt zusammen, wenn die Tangente zur dreipunktigen wird und umgekehrt. Dann hat man in den Gleichungen

$$(9)\quad A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ zu setzen und λ zu eliminiren.

Da aber A_1, A_2 durch Gleichsetzung der drei Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu den ersten Differentialquotienten von a_λ werden und deren Resultante gleich der Discriminante D von a_λ ist, so hat man:

ζ) „Eine in drei consecutiven Punkten treffende Tangente der Curve ist (und nur dann) unter der Bedingung $D = 0$ vorhanden, dann ist sie die Axe von zwei consecutiv gewordenen Undulationsebenen der Curve: das Argument dieser Tangente ist zugleich eine gemeinsame Wurzel von H und P."

121. Mit Hülfe dieser Sätze ist es ohne Mühe möglich, alle weiteren invariantiven Bildungen (resp. Bedingungen) auf der Curve (5) zu studiren, was uns hier indess von der Ausführung unseres Hauptplanes, die Apolarität (vor Allem die ternäre und quaternäre) in der Theorie einer (und mehrerer) biquadratischen binären Form nachzuweisen, zu weit abführen würde.

Nachdem die Apolaritätstheorie einer solchen Form im Wesentlichen durchgeführt ist, erübrigt noch die schon bedeutend schwierigere zweier solcher Formen d. h. die Theorie der Involutionen vierter Ordnung, die ja nach dem Hauptsatze des ersten Capitels mit der Theorie der Gruppen von drei solchen Formen identisch ist.

Diese Theorie der biquadratischen Involution führt dann wieder unmittelbar zur Theorie einer und mehrerer Formen sechsten Grades, da beide auf's innigste verwachsen sind.

Im Uebrigen sehe man den Schluss des vorigen Paragraphen nach.

Abschnitt III.

Die binäre Form sechsten Grades und die biquadratische Involution und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

§. 25.

Die Darstellung auf der cubischen Normcurve.

122. Dieser Abschnitt beginne mit einer einleitenden Bemerkung, die sich auf die Darstellung im Weiteren bezieht.

Nach den systematischen Entwicklungen nemlich, wie sie bis jetzt vorliegen, und die besonders im zweiten Capitel (Abschnitt I und II) einzelne Wiederholungen, sowie Wiedergaben von Bekanntem nicht vermeiden liessen, dürfte eine thunliche Gedrängtheit von nun ab geboten sein, um so wenigstens einen Theil des reichen Stoffes in dieser Arbeit bewältigen zu können.

Um den Gang der weitern Theorie (mehrerer) biquadratischer Formen später nicht zu oft zu unterbrechen, möge zunächst die Hülfstheorie der binären Form sechsten Grades, soweit sie sich an die Betrachtung dieser auf der cubischen Normcurve (und weiterhin auf dem Normkegelschnitt *)) anlehnt und für die Abrundung der erstgenannten Theorie erforderlich ist, vorausgehen.

123. Nach Reye[42] trägt (stützt, ist apolar zu) eine Fläche zweiter Ordnung F_2:

(1) $a_x^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ $(i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$

*) Die darauf bezügliche Betrachtung fällt mit der zur Normcurve vierter Ordnung gehörigen, wie sich zeigen wird, im Wesentlichen zusammen.

eine andere Fläche zweiter Klasse Φ_2 (und umgekehrt ruht (stützt sich) dann die letztere auf der ersteren):

$$(2)\ u_\alpha^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, u_{ik}\, \alpha_i\, \alpha_k = 0$$

unter der Apolaritätsbedingung (des Verschwindens der bilinearen Invariante beider):

$$(3)\ (a\alpha)^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0.$$

Dann giebt es nach Hesse[43] ein (und damit unendlich viele) Poltetraeder der ersten (zweiten), die der zweiten (ersten) um- (ein-) beschrieben sind.

Wir suchen jetzt die Bedingungen, unter denen eine F_2 (1) alle einer cubischen Raum- (Norm-)Curve umbeschriebenen Flächen zweiter Klasse Φ_2 oder, wie wir kürzer sagen, die Curve stützt *).

Die ganze der Normcurve

$$(4)\ \rho x_0 = 1,\ \rho x_1 = 3\lambda,\ \rho x_2 = 3\lambda^2, \rho x_3 = \lambda^3\ (N_3) \text{ oder}$$

$$(5)\ \sigma u_0 = \lambda^3,\ \sigma u_1 = -\lambda^2, \sigma u_2 = \lambda,\ \sigma u_3 = -1\ (N_3)$$

umschriebene Klassenschaarschaar von Φ_2 war gegeben durch (v. pg. 49)

$$(6)\ \nu_0\,(u_0\, u_2 - u_1^2) + \nu_1\,(u_0\, u_3 - u_1\, u_2) + \nu_2\,(u_1\, u_3 - u_2^2) = 0.$$

Soll demnach die F_2 (1) die Curve N_3 (5) d. h. die Flächen der Schaarschaar (6) stützen, so sind dazu die drei Bedingungen nothwendig und hinreichend:

$$(7)\ a_{02} = a_{11},\ a_{03} = a_{12},\ a_{13} = a_{22}.$$

„Diese Bedingungen (7) sind vollkommen ausgedrückt, wenn man die Coefficienten von (1) der Bezeichnung unterwirft:

**) Im dualistischen Falle nennt dann Reye (Crelle's Journal Bd. 82) die Curve die cubische Polcurve der Fläche. Danach müsste man, wenn, wie oben, die Fläche F_2 die Curve stützt, genau sagen: die Curve ist die cubische Polarencurve der Fläche. Den Grund dieser Bezeichnung wird man bald erkennen.

(8) $a_{ik} = a_{i+k}$ $(i + k = 0, 1, \ldots 6)$.

Dann geht die F_2 (1) in die Gestalt über:

(9) $a_{xx} = x_0 (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + x_1 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3) + x_2 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3) + x_3 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3) = 0.$

Da aber die canonische Form der cubischen Curven (cf. pg. 49) so gewählt ist, dass die homogenen Coordinaten x_i eines Raumpunktes gerade zusammenfallen mit den homogenen symmetrischen Funktionen σ_i dreier Elemente μ (der Parameter der durch den Punkt gehenden Ebenen der Curve), so entsteht (9) aus der einfacheren Form:

(10) $a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6 = 0,$

wenn man von den sechs Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6$, aus denen die s gebildet sind, immer zwei einander gleich setzt:

(11) $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1; \ \lambda_3 = \lambda_4 = \mu_2; \ \lambda_5 + \lambda_6 = \mu_3.$

Soll dies auch äusserlich hervortreten, so schreiben wir in (9) die σ statt der x und erhalten

$$(12) \quad a_\sigma^2 = 0.$$

Der Schnitt der F_2 {(9) oder (12)} mit der Normcurve N_3 (4) liefert das Sextupel:

(13) $f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_\lambda = a_0 \mu^6 + 6 a_1 \lambda\mu^5 + 15 a_2 \lambda^2 \mu^4 + 20 a_3 \lambda^3 \mu^3 + 15 a_4 \lambda^4 \mu^2 + 6 a_5 \lambda^5 \mu + a_6 \lambda^6 = 0.$

Dieses geht aus (10) a_s durch Gleichsetzen aller Elemente λ hervor d. h. a_s ist die nach sechs Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6$ polarisirte Form a_λ (13).

Daraus folgt dann, dass man (cf. pg. 36) der Form a_σ^2 (12) auch die Gestalt

$$(14) \quad a_\sigma^2 \equiv a_{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}$$

geben kann, sowie, dass die Klammerfaktoren in (9) die dritten

Ueberschiebungen (bilinearen Invarianten) der dritten Differentialquotienten von f über die cubische Form mit den Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 sind.

Umgekehrt ist die Form a_s, also auch $a_\sigma^2 \equiv a_x^2$ eindeutig durch a_λ bestimmt; wie auch geometrisch evident ist, da durch sechs gegebene Punkte (13) $f = 0$ von N_3 nur eine F_2 gehen kann, die alle N_3 umschriebenen Φ_2 stützt.

Da die Normgleichung einer cubischen Raumcurve, so lange diese eine eigentliche ist, immer (pg. 47) durch eine bestimmte Raumcollineation herzustellen ist, so hat man:

α) „Durch irgend sechs Punkte*) einer cubischen Raumcurve (auf der eine Parametervertheilung ausgebreitet sei)

$$(13) \quad a_\lambda = 0$$

geht eine einzige sie stützende F_2, deren Gleichung dann mittelst einer bestimmten Collineation stets in die Gestalt gebracht werden kann:

$$(12)\,(14) \quad a_\sigma^2 \equiv a_{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} = 0.\text{“}$$

124. Suchen wir nunmehr, ehe wir die F_2 (12) näher untersuchen, die zur vorigen dualistische Entwicklung.

Das der Curve N_3 (4) einbeschriebene F_2-Netz war (pg. 48):

$$(15) \quad \mu_0 (3 x_0 x_2 - x_1^2) + \mu_1 (9 x_0 x_3 - x_1 x_2)$$
$$+ \mu_2 (3 x_1 x_3 - x_2^2) = 0.$$

Somit ruht eine Classenfläche Φ_2

$$(16) \quad u_\beta^2 = 0$$

auf der Curve N_3, wenn:

---

*) Man könnte auch sagen: durch sechs Raumpunkte geht eine einzige F_2, die die durch die sechs Punkte gehende cubische Raumcurve stützt etc.

$$(17)\quad \beta_{11} = 3\,\beta_{02},\ \beta_{12} = 9\,\beta_{03},\ \beta_{22} = 3\,\beta_{13}.$$

Ersetzt man daher zuvörderst in (16) die β_{11}, β_{12}, β_{22} durch ihre resp. rechten Seiten in (17), so kann man dann wiederum die Bezeichnungsart einführen:

$$(18)\quad \beta_{ik} = \beta_{i+k}\ (i + k = 0, 1, \ldots 6)$$

wodurch aus (16) wird:

$$(19)\quad u_\beta^2 \equiv u_0^2\,\beta_0 + 2\,u_0\,u_1\,\beta_1 + 2\,u_2\,u_3\,\beta_5 + u_3^2\,\beta_6 + \beta_2\,(2\,u_0\,u_2 + 3\,u_1^2) + 2\,\beta_3\,(u_0\,u_3 + 9\,u_1\,u_2) + \beta_4\,(2\,u_1\,u_3 + 3\,u_2^2) = 0,$$

und für das Sextupel der dieser Fläche mit N_3 (5) gemeinsamen Ebenen erhält man:

$$(20)\quad \beta_\lambda = \beta_0\,\lambda^6 - 2\,\beta_1\,\lambda^5\mu + 5\,\beta_2\,\lambda^4\,\mu^2 - 20\,\beta_3\,\lambda^3\,\mu^3 + 5\,\beta_4\,\lambda^2\,\mu^4 - 2\,\beta_5\,\lambda\mu^5 + \beta_6\,\mu^6 = 0.$$

125. Diese beiden Formen (19) (20) bedingen sich also wieder gegenseitig eindeutig.

Vergleicht man beide, so erkennt man ohne Weiteres, dass (19) entsteht, wenn man aus β_λ (20) zunächst die Form β_s (durch Polarisation nach sechs Werthen) bildet, und dann in β_s die Substitutionen vornimmt:

$$(21)\quad \sigma_3 = u_0,\ \sigma_2 = -3\,u_1,\ \sigma_1 = 3\,u_2,\ \sigma_0 = -u_3.$$

Dies war aber a priori vorauszusehen, denn die Bildung der Gleichung einer Klassenfläche Φ_2, die mit N_3 das Sextupel β_λ (20) gemein hat und auf N_3 ruht, muss ja gerade so (nur dualistisch) erfolgen, wie die der Ordnungsfläche F_2 (12), die mit N_3 das Sextupel a_λ^6 gemein hat und N_3 stützt.

Da aber die σ mit den Coordinaten eines Punktes identisch sind, so gehen vermöge der Gleichungen (21) (cf. pg. 49) Punkt- in Ebenencoordinaten (für dieselben Argumente $\mu_1\ \mu_2 \ldots \mu$) über

Andrerseits überzeugt man sich sofort, dass die bilinea[illegible] Invariante der Flächen (12) und (19) identisch ist mit der d[illegible] beiden binären Formen (13) a_λ und (20) β_λ. Demnach g[illegible] der wichtige, später vielfach benützte Satz:

β) „Die bilineare Invariante zweier binär[illegible] Formen sechsten Grades (a_λ^6, b_λ^6) ist identisch m[illegible] der zweier quaternärer Formen zweiten Grad[illegible]s, die, $=0$ gesetzt, eine F_2 resp. Φ_2 darstellen, d[illegible]ie eine (sonst beliebige) cubische Raumcurve trag[illegible]n resp. auf ihr ruhen, und mit ihr die gegeben[illegible]n Formen a, b resp. gemein haben.

Sind also die binären Formen apolar, so au[illegible]h die quaternären und umgekehrt."

Auch dieser Satz ist leicht ohne spezielle Rechnung [illegible]zu erhärten.

Denn die Gleichung einer F_2, die aus einer cubisch[illegible]en Curve das Punktsextupel a_λ^6 ausschneidet und auf der Cu[illegible]ve ruht, muss (wie auch aus (12) ersichtlich) offenbar vom ers[illegible]en Grade in den Coefficienten von a_λ^6 sein: desgleichen die [illegible]ur Curve bezüglich einer zweiten Form b_λ^6 sich dualistisch v[illegible]er-haltende Φ_2.

Die simultanen Invarianten beider Flächen sind von ei[illegible]er linearen Transformation auf der Curve völlig unabhängig d[illegible]h. simultane Invarianten der Formen a_λ^6, b_λ^6 (durch die ja [illegible]ie resp. Flächen eindeutig bestimmt sind).

Da endlich die bilineare Invariante der beiden binä[illegible]en Formen die einzige ist, die vom ersten Grade in den Coe[illegible]ffi-cienten beider wird, so ist der Satz bewiesen, der in die[illegible]er Art eine Verallgemeinerung *) des Nr. 49 aufgestellten [illegible]ist.

126. Wir kehren jetzt vorläufig wieder zu der einen F_2 (12) zurück.

*) Der ganz allgemeine Satz findet sich in Cap. III dieses Werkes.

In Ebenencoordinaten schreibt sie sich:

$$(22)\; 0 = u_A{}^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & u_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & u_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & u_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & u_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wo die rechte Seite die geränderte Determinante der F_2 ist, die mit der Invariante vierten Grades a_λ^6 (cf. Salmon, Höhere Algebra, art. 252) zusammenfällt *).

Combinirt man (22) mit der Gleichung von N_3, so ergiebt sich das die gemeinsamen Ebenen beider Gebilde darstellende Sextupel als die Covariante von $a_\lambda^6 \equiv f$:

$$(23)\; 0 = H = \begin{vmatrix} f_{1111} & f_{1112} & f_{1122} \\ f_{1112} & f_{1122} & f_{1222} \\ f_{1122} & f_{1222} & f_{2222} \end{vmatrix}$$

d. i. die Determinante der vierten Differentialquotienten von f.

Dieses Resultat wird sich bald auch geometrisch bestätigt finden. Es ist die Erweiterung (cf. Kap. III) des Nr. 48 bewiesenen (ternären) Satzes und mag besonders betont werden, zumal da der eigenthümliche Zusammenhang der Formen f und H später eine sehr wichtige Rolle spielt.

γ) „Hat eine eine cubische Raumcurve stützende F_2 mit ihr das Punktsextupel f gemein, so sind die gemeinsamen Ebenen beider durch die Form H gegeben, wo H die bekannte Covariante von f (Determinante der vierten Differentialquotienten) ist."

Nehmen wir das Resultat vorweg, dass zu einer gege-

*) Es ist dies die von Sylvester so genannte Catalektikante, deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die Form f als Summe von drei sechsten Potenzen darstellbar ist. Davon wird weiterhin Gebrauch gemacht.

benen binären Form H fünf andere gehören, so dass ihre Covariante H mit der ersteren Form identisch ist, so gilt im Anschluss an γ):

δ) „Sechs Ebenen einer cubischen Raumcurve sind zugleich die Ebenen von fünf die Curve stützenden Flächen zweiter Ordnung (und dualistisch).“

127. Wir gelangen jetzt mittelst der Form f zu einer sehr einfachen Darlegung der zum Theil schon von Reye (Crelle Bd. 82) eingehend untersuchten Eigenschaften der Polvielflache der Fläche (12), die der Curve N_3 umbeschrieben sind. Man erkennt leicht die Analogie mit den Entwicklungen für den Normkegelschnitt, auf dem eine biquadratische binäre Form gegeben war.

Theilt man nemlich die sechs Werthe λ in (10) a_s in zwei Gruppen

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$; $\lambda_4 \lambda_5 \lambda_6$ mit den bez. symmetrischen Funktionen

σ_i, τ_i, $(i = 0, 1, 2, 3)$

so geht (10) über in

$$(24) \quad a_{\sigma\tau} = 0. \text{ d. h.}$$

die Punkte (σ) (τ) bilden ein in Bezug auf unsere F_2 [(12) oder (14)] conjugirtes Paar. Aus der Symmetrie der Form (10) in den sechs Elementen λ folgt dann sofort:

ε) „Irgend ein conjugirtes Punktepaar unserer eine cubische Curve stützenden Fläche bestimmt*) (mittelst der beiden an die Curve ge-

*) Ist eine beliebige Fläche zweiter Ordnung $\sigma_x^2 = 0$ gegeben, so bestimmen bekanntlich[44]) (cf. z. B. Rosanes, Crelle's Journal Bd. 88, pg. 26[illegible] ff.) irgend vier conjugirte Punktepaare der Fläche sechs weitere, die mit den ersten die Gegenecken eines Polsechsflachs der Fläche bilden. Es sind dies die zehn zerfallenden Flächen der dreifach unendlichen Schaar von Flächen zweiter Classe, die sich aus den ersten vier Punktepaaren linear zusammensetzt.

benden Ebenentripel) ein der Curve umschriebenes Polsechsflach der Fläche (d. h. dessen sämmt-

---

Der Übergang von diesem Satze zum obigen (ε) gestaltet sich ganz analog wie in der Ebene (cf. pg. 88).

Sind durch vier conjugirte Punktepaare irgend einer F_2 weitere mitbestimmt, so findet eine lineare Identität (in den a_{ik}) der Form statt:

$$k_1\, a_{x_1y_1} + k_2\, a_{x_2y_2} + k_3\, a_{x_3y_3} + k_4\, a_{x_4y_4} + k_5\, a_{x_5y_5} = 0.$$

In der That giebt das zehn Gleichungen, aus denen sich gerade die zehn Unbekannten (die Verhältnisse der k nebst den Coordinaten der beiden Punkte eines fünften Paares) bestimmen.

Soll nun schon ein conjugirtes Punktepaar weitere mitbestimmen, so müssen drei lineare Relationen zwischen den a_{ik} stattfinden: dann zerfällt die Identität

$$k_1\, a_{x_1y_1} + k_2\, a_{x_2y_2} = 0$$

in sieben Gleichungen, die die jetzt vorhandenen sieben Unbekannten bestimmen.

Mithin muss für diesen Fall die F_2 zu drei Flächen zweiter Klasse (und damit zu ihrer Schaarschaar) apolar sein.

In unserem Falle ist diese Schaarschaar speciell die einer cubischen Raumcurve φ umbeschriebene.

In der That giebt es ja dann, wie Satz (k) zeigt, Polvierflache von F_2, die φ d. h. jeder der Flächen der Schaarschaar φ umschrieben sind, was mit der bekannten (Hesse'schen) Erklärung der Apolarität übereinstimmt.

Umgekehrt aber folgt aus dem Obigen noch nicht ohne Weiteres, dass es solche φ umschriebene Polvierflache von F_2 giebt; dies zeigt erst die Textentwicklung.

Man findet diese Beziehung von F_2 zu φ auch bei Reye (Crelle Bd. 82) des Näheren untersucht, der auch die umgekehrte Frage erledigt, welche Curven φ zu einer gegebenen Fläche F_2 gehören.

Auch im Übrigen verweise ich ein für allemal auf diese und die verwandten[45]) Arbeiten Reye's, die mit unsern Untersuchungen auf das engste zusammenhängen, wenn auch die ganze Untersuchungsmethode eine wesentlich verschiedene ist. Sie aber haben mir die eigentliche Anregung zur Abfassung dieses Werkes gegeben.

liche Gegeneckenpaare solche conjugirten Punkte-paare sind)."

„Es giebt eine fünffach unendliche (∞^5)*) lineare Schaar solcher der Curve umschriebenen Polsechsflache der Curve. Die bezüglichen Ebenensextupel stellen auf der Curve die ganze zum Schnittpunktsextupel von Fläche und Curve conjugirte Gruppe dar."

Umgekehrt folgt hieraus mit Hülfe des Satzes (β):

ζ) „Ist eine cubische Curve nebst einer sie stützenden F_2 gegeben, so construire man die (∞^5) lineare Schaar von Klassenflächen Φ_2, die auf F_2 und der Curve ruhen. Die dieser Schaar mit der Curve gemeinsamen Ebenensextupel sind die Ebenen der Polsechsflache des vorigen Satzes."

„Die ganze zur Fläche F_2 conjugirte Gruppe von (Klassen-) Flächen setzt sich linear zusammen aus sechs Flächen der Schaar der Φ_2 und drei der der Curve umbeschriebenen Flächen."

„Die ganze zur Schaar der Φ_2 conjugirte Gruppe von (Ordnungs-) Flächen setzt sich linear zusammen aus F_2 und dem der Curve einbeschriebenen Netze."

128. Nun kann man aber den Satz (β) und Gleichung (24) in derselben Weise auf eine ganze Schaar von Flächen F_2 anwenden, die nur sämmtlich der Bedingung genügen müssen, die Curve zu stützen und gelangt so zu dem allgemeineren, später benützten Satze:

*) Diese gebräuchliche Abkürzung werde von jetzt ab eingeführt. Eine andere Abkürzung tritt ferner des Öfteren später auf: so oft kein Zweifel herrschen kann, heisse es nur „Involution" statt „biquadratischer Involution".

η) „Gegeben sei eine cubische Raumcurve und eine ∞^m ($m = 0, 1, .. 5$) lineare Schaar von F_2, die alle die Curve stützen.

Dann existirt eine ∞^μ ($\mu = 5-m$) lineare Schaar von Φ_2, die alle auf der F_2-Schaar und zugleich auf der Curve ruhen.

Die der Φ_2-Schaar mit der Curve gemeinsamen Sechsflache sind *alle* der Curve umschriebenen *gemeinsamen* Polsechsflache der F_2-Schaar.

Die zugehörigen Ebenensextupel der Curve bilden die *ganze* zur Schaar der Schnittpunktsextupel von Curve und F_2-Schaar conjugirte (*binäre*) Gruppe."

„Dem entspricht dann, dass die *ganze* zur F_2-Schaar *conjugirte* (*quaternäre*) Schaar sich *linear* zusammensetzt aus den Flächen der Φ_2-Schaar und den der Curve umschriebenen Flächen: umgekehrt setzt sich die *ganze* zur Schaar der Φ_2 *conjugirte* (*quaternäre*) Schaar *linear* zusammen aus den Flächen der F_2-Schaar nebst den der Curve einbeschriebenen Flächen."

129. Wir kommen jetzt wieder zu einer Fläche F_2, die die Curve stützt, zurück und stellen ihre der Curve umschriebenen Polfünf- und -vierflache auf.

Bekanntlich wird ein Polsechsflach einer F_2 zum Polfünf- resp. -vierflach, wenn eine resp. zwei seiner Ebenen unbestimmt werden.

Dann ist jeder Eckpunkt zur Gegenkante resp. Gegenebene conjugirt. Mithin werden diese speciellen Polsechsflache vermöge der bekannten Umformung der Form a_x^6 (pg. 32) dargestellt durch die Gleichungssysteme:

$$(25) \begin{cases} A_1 \equiv a_0 S_0 + a_1 S_1 + \dots a_5 S_5 = 0 \\ A_2 \equiv a_1 S_0 + a_2 S_1 + \dots a_6 S_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{resp. } (26) \begin{cases} A_{11} \equiv a_0 T_0 + a_1 T_1 + \dots a_4 T_4 = 0 \\ A_{12} \equiv a_1 T_0 + a_2 T_1 + \dots a_5 T_4 = 0. \\ A_{22} \equiv a_2 T_0 + a_3 T_1 + \dots a_6 T_4 = 0 \end{cases}$$

wo die A_i resp. A_{ik} die nach fünf resp. vier Werthen polarisirten ersten resp. zweiten Differentialquotienten von $f \equiv a_\lambda^6$ sind.

Dies heisst aber mit Hülfe des Fundamentalsatzes des §. 5:

$\varkappa$) „Die Ebenen der einer cubischen Raumcurve umschriebenen (∞^3, linearen) Schaar der Polfünfflache resp. der (∞^1, linearen) Schaar der Polvierflache einer die Curve stützenden und das Sextupel f ausschneidenden F_2 sind durch die zur Gruppe der ersten resp. zweiten *Polaren* von f *conjugirten* Gruppen dargestellt."

Diese der Curve umschriebenen Polvierflache von F_2, die also eine biquadratische Involution auf der Curve erzeugen, bilden weiterhin den Kern der ganzen Entwicklung. Es wird sich zeigen, dass man umgekehrt von ihnen ausgehend, wieder die F_2 reconstruiren kann (und zwar in eindeutiger Weise).

130. Zunächst zeigt man leicht, wie aus dem letzten Satze wieder der Satz (γ) hervorgeht. Denn aus den Gleichungen (26) folgt, dass man von den vier Elementen (Ebenen der Curve), die ein Quadrupel der Involution der Polvierflache bilden, eines beliebig annehmen kann; dann ist das Quadrupel eindeutig bestimmt.

Man wähle als eine solche Ebene eine der gemeinsamen Ebenen von F_2 und der Curve. Dann (und nur dann) liegt ihr

Pol (in Bezug auf die F_2) auf ihr, d. h. es müssen von den vier Ebenen des Quadrupels zwei coincidiren.

Zunächst ergiebt sich durch Elimination zweier der vier in (26) enthaltenen Werthe $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$, etwa λ_3, λ_4, die Gleichung (23), wenn man in ihr die vierten Differentialquotienten nach zwei Elementen $\lambda_1\ \lambda_2$ polarisirt.

Dann stellt (23) die Bedingung dar, unter der zwei Ebenen der Curve $\lambda_1\ \lambda_2$, einem Quadrupel der Polvierflachinvolution angehören.

Fallen λ_1, λ_2 zusammen, so resultirt demnach (23) selbst.

q. e. d.

In der That kommt dies nur auf einen früheren Satz (pg. 41) zurück. Denn die Doppelelemente einer biquadratischen Involution sind ja die Wurzeln ihrer Funktionaldeterminante. Diese ist aber identisch mit der ihrer conjugirten Gruppe, d. i. hier der Gruppe der zweiten Polaren von f, ist also keine andere als die Covariante H.

131. Durch sechs beliebig gewählte binäre Formen sechsten Grades ist, wie wir wissen, im Allgemeinen stets eine siebente zu allen jenen apolare eindeutig bestimmt. (Nach früherer (§§. 2, 5) Bezeichnungsweise heisst dies: man fasst eine Form a_λ^6 als Schnittpunktform einer R_6^5 auf.) Dies hat hier zur Folge:

λ) „Sechs beliebig einer cubischen Raumcurve umschriebene Sechsflache sind Polsechsflache einer bestimmten die Curve stützenden F_2. Dann giebt er eine ∞^5 Schaar solcher Polsechsflache etc. etc.“

132. Wir gelangen jetzt zu dem am Schluss von Nr. 129 angedeuteten Satz, der sich algebraisch einfach so formuliren lässt:

μ) „Die zu einer gegebenen biquadratischen

Involution conjugirte Gruppe ist (im Allgemeinen) die Gruppe der zweiten Polaren einer bestimmten Form sechsten Grades."

Den Beweis führt man so. Ist die gegebene Involution eine ganz allgemeine, so auch ihre conjugirte Gruppe. Wir zeigen daher, dass drei allgemeine Formen vierten Grades

$$(27) \quad \varphi = a_\lambda^4, \; \chi = b_\lambda^4, \; \psi = c_\lambda^4$$

die zweiten Polaren einer bestimmten einzigen Form

$$(25) \quad g \equiv g_\lambda^6$$

sind, d. h. dass es drei bestimmte lineare Combinationen der φ, ψ, χ giebt, die die zweiten Differentialquotienten von g sind:

$$(29) \begin{cases} \mu_1 \varphi + \nu_1 \chi + \pi_1 \psi \equiv g_{11} \\ \mu_2 \varphi + \nu_2 \chi + \pi_2 \psi \equiv g_{12} \\ \mu_3 \varphi + \nu_3 \chi + \pi_3 \psi \equiv g_{22} \end{cases}$$

Dies liefert acht in den neun Grössen μ, ν, π homogene, lineare Relationen, die demnach ihre Verhältnisse eindeutig zu bestimmen erlauben.

Denn die Möglichkeit, dass etwa zwischen diesen acht Relationen Identitäten stattfänden, wodurch die Werthe der μ, ν, π unbestimmt würden, widerlegt sich z. B. so.

Man sieht, dass für eine Form g ihre Covariante H (23) mit der Funktionaldeterminante der Formen (27) zusammenfällt. Demnach führt unsere Frage zu der andern: Wieviel Involutionen vierten Grades giebt es mit gegebenen sechs Doppelelementen? oder Wieviel Formen sechsten Grades giebt es, die eine gegebene zur Covariante H haben? und dies wieder nach Satz Y: Wieviel F_2 giebt es, die mit einer cubischen Curve irgend sechs gegebene Ebenen gemein haben und die Curve stützen?

Aus dieser letzten Form geht aber deutlich hervor, dass

es eine endliche Zahl solcher geben muss, womit der aufgeworfene Zweifel erledigt ist.

Von dieser endlichen Zahl von Lösungen gehört dann nach Obigem eine bestimmte zu der gegebenen zu (27) conjugirten Involution.

Die fragliche Zahl der Lösungen ist schon oben (Nr. 126) vorläufig als fünf angegeben.

Somit ist Satz (μ) erwiesen und wir geben ihm die andere wichtigere Gestalt:

μ') „Die Theorien der binären Form sechsten Grades und der biquadratischen Involution sind identisch."

133. Mit Rücksicht auf diesen letzten Satz ist dann die Frage nach der Bedingung, unter der zwei Elemente λ_1, λ_2 einem Quadrupel einer gegebenen Involution

$$(30)\ \alpha_\lambda^4 + k\,\beta_\lambda^4$$

angehören, schon in Nr. 130 erledigt. Denn sei f die binäre Form sechsten Grades, deren zweite Polaren die zur gegebenen Involution conjugirte Gruppe bilden, so ist die Bedingung (cf. die analoge pg. 98)

$$(31)\ 0 = \mathrm{H} \equiv \begin{vmatrix} A_{1111} & A_{1112} & A_{1122} \\ A_{1112} & A_{1122} & A_{1222} \\ A_{1122} & A_{1222} & A_{2222} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2, & a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, \\ a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2, & a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, & a_3\sigma_0 + a_4\sigma_1 + a_5\sigma_2, \\ a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, & a_3\sigma_0 + a_4\sigma_1 + a_5\sigma_2, & a_4\sigma_0 + a_5\sigma_1 + a_6\sigma_2 \end{vmatrix}$$

wo H aus der Covariante H von f durch Polarisation der vierten Differentialquotienten nach zwei Werthen λ_1 λ_2 hervorgeht.

Die Ecken der der cubischen Curve umschriebenen Involutionstetraeder liegen auf einer zweiten Curve, die wieder eine cubische ist, da nach (26) zu jedem Element λ_1 drei bestimmte λ_2, λ_3, λ_4 gehören, die mit ihm ein Involutionsquadrupel

bilden d. h. da in jeder Ebene der ursprünglichen Curve nur drei Punkte der zweiten Curve liegen können (die drei Eckpunkte des durch die Ebene λ_1 bestimmten *) Tetraeders).

Beide Curven stehen also in der Beziehung, dass der einen ∞^1-Tetraeder um- und der andern zugleich einbeschrieben sind, eine von Hurwitz[46] näher studirte Beziehung, die daher von jetzt ab immer kurz die Hurwitz'sche heisse. Dann können wir sagen:

ν) „Die einer biquadratischen Involution angehörigen Axen einer cubischen Raumcurve (N_3) sind Sehnen **) einer zweiten (H_3), die zur ersten in der Hurwitz'schen Beziehung steht. Den sechs Doppelelementen $H = 0$ der Involution entsprechen die sechs Tangenten von N_3, die Sehnen von H_3 sind.

Jede Ebene von N_3 ist Ebene eines N_3 um- und H_3 einbeschriebenen Tetraeders (dualistisch jeder Punkt von H_3 Eckpunkt eines solchen).

Steht eine Curve H_3 zu N_3 in dieser Beziehung, so lässt sie sich immer durch *eine* Gleichung *(31)* vollständig darstellen."

Somit sind die Begriffe „biquadratische Involution auf einer cubischen Curve" und „Hurwitz'sche Beziehung zweier cubischer Curven" vollkommen vertauschbar, und der Satz (μ) gewinnt jetzt für die Theorie der cubischen Raumcurven folgende Gestalt:

μ'') „Stehen zwei cubische Raumcurven in der

*) Zu einer Ebene der Curve gehört ein Punkt als Pol (in Bezug auf die F_2), der mittelst des an die Curve gehenden Ebenentripels das Tetraeder bestimmt.

**) Im Allgemeinen giebt es bekanntlich sechs Axen einer cubischen Curve, die Sehnen einer zweiten sind, in unserem Falle aber unendlich viele. Wir kommen später darauf genauer zurück.

Hurwitz'schen Beziehung, so sind die bezüglichen um- resp. einbeschriebenen Tetraeder die Poltetraeder einer bestimmten F_2, die die eine Curve stützt resp. auf der andern ruht, deren mit der einen gemeinsame Ebenen resp. mit der andern gemeinsame Punkte in die Doppelelemente H der zugehörigen Involution fallen, und deren mit der einen gemeinsame Punkte resp. mit der andern gemeinsame Ebenen durch eine Form f dargestellt werden, deren Covariante H mit der obigen Form H zusammenfällt."

134. Damit sind die Grundlinien einer Theorie verzeichnet, die der in den §§. 17 ff. durchgeführten ganz analog ist, indem man hier von einer binären Form sechsten Grades als Covariante H einer andern solchen Form ausgeht. Daher spricht sich der dem Satze Nr. 76 entsprechende so aus:

π) „Man gehe von irgend einem Sextupel H auf einer cubischen Raumcurve φ aus. Dann giebt es einmal fünf Curven H_3, die zu φ in der Hurwitz-schen Beziehung stehen, sodass sie die sechs Tangenten H zu Sehnen haben *); andrerseits fünf Flächen F_2, die φ stützen und mit φ das Ebenensextupel H gemein haben.

Je eine der Curven H_3 ist einer bestimmten der Flächen F_2 eindeutig zugeordnet (und umg.), indem sie der Ort der Ecken der φ umschriebenen Polvierflache von F_2 ist."

135. Dieser Zusammenhang zwischen einer Curve H_3 und der ihr zugeordneten F_2 lässt sich leicht noch genauer verfolgen.

*) Dies sind gerade (wie sich weiterhin herausstellen wird) diejenigen fünf cubischen Curven, die überhaupt sechs Tangenten von φ zu Sehnen haben.

Denn die Curve H_3 ist der Ort der Ecken der φ um-schriebenen Tetraeder einer bestimmten Involution (mit de[n] Doppelelementen H), also (cf. Hurwitz l. c.) durch irgen[d] zwei beliebige φ umschriebene Tetraeder gerade so eindeuti[g] bestimmt, wie die Involution durch die beiden bezügliche[n] Quadrupel.

Mit Rücksicht auf die Sätze (β), sowie (ε) bis (η) hat man daher Folgendes:

ρ) „Einer cubischen Raumcurve φ seien irgend zwei Tetraeder umbeschrieben. Deren Ecken liegen auf einer bestimmten Curve H_3 (der dann noch unendlich viele solche φ umschriebene Tetraeder einbeschrieben sind).

Für jedes der beiden gegebenen Tetraeder giebt es eine Schaarschaar von Flächen Φ_2, die ihm einbeschrieben sind und auf φ ruhen. Dies seien S_1, S_2. Dann ist die H_3 zugeordnete F_2, für die alle H_3 ein- und φ umbeschriebenen Tetraeder Poltetraeder sind, dadurch *eindeutig bestimmt, dass sie auf den drei Schaarschaaren S_1, S_2, φ*) ruht.*

Dann ruht sie auch auf jeder weitern Schaarschaar, die durch je eines der obigen unendlich vielen Tetraeder mitbestimmt ist."

136. Will man umgekehrt von der Fläche F_2 zur Curve H_3 übergehen, so kann man gleichfalls von zwei, φ umschriebenen Tetraedern ausgehen, wie im letzten Satze, oder auch von irgend drei φ umschriebenen Fünfflachen resp. irgend sechs der Curve φ umschriebenen Sechsflachen. Die letztere Thatsache ist schon im Satze (λ) ausgesprochen gewesen. Hier

---

*) Die Schaarschaar φ ist der abgekürzte Ausdruck für die φ umschriebene Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse. Das Dualistische gilt vom Netze φ.

handelt es sich um die Construktion der zugehörigen F_2. Diese fliesst wieder sofort aus den Sätzen (β) (ε) bis (η):

σ) „I. Irgend sechs φ umschriebene Sechsflache sind Polsechsflache einer bestimmten (φ stützenden) F_2. Diese Bestimmung geschieht so. Jedem der Sechsflache ist eine einzige Fläche Φ_2 einbeschrieben, die auf dem Netze φ ruht. So entstehen sechs Flächen Φ_2^k ($k = 1 \, . \, . \, 6$).

Dann giebt es nur eine F_2, die die Schaarschaar φ und die sechs Flächen Φ_2^k (und damit natürlich die aus ihnen linear gebildete ∞^5-Schaar) *stützt*. Dies ist die gewünschte.

II. Irgend drei φ umschriebene Fünfflache sind Polfünfflache einer bestimmten (φ stützenden) F_2. Die Bestimmung ist der in I analog.

Es giebt für jedes der drei Fünfflache eine (∞^1 lineare) Schaar von Flächen Φ_2, die ihm einbeschrieben sind und auf dem Netze φ *ruhen*. Diese seien Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Dann giebt es nur eine F_2, die die Schaarschaar φ nebst den drei Schaaren Σ_1, Σ_2, Σ_3 stützt. Dies ist die gewünschte."

Diese drei Sätze (ρ) (σI) σII) lassen sich kurz in einen zusammenfassen, der dann zugleich noch eine Reihe ähnlicher enthält, nemlich:

τ) „Die sechs Sechsflache des Satzes (σI) lassen sich der Reihe nach ersetzen und zwar immer zwei durch ein Fünfflach, und immer drei durch ein Vierflach."

137. Wir gehen jetzt über (analog dem Verfahren des §. 18, Nr. 52 ff.) zur canonischen Form der Flächen F_2 (die die Curve φ stützen) und der zugehörigen Curven H_3. Diese fällt

wieder völlig mit der binären Canonizationsfrage zusammen. Zugleich treten dadurch verschiedene der oben entwickelten Eigenschaften von F_2 in ein helleres Licht.

Den Ausgang bilde wieder die Form $a_\lambda^6 \equiv f$, deren zugehörige F_2 a_σ^2 (13) war. Man kann bekanntlich eine Form auf fünffach unendliche Weise als Summe von sechs sechsten Potenzen darstellen:

$$(32)\ f \equiv \sum_{i=1}^{i=6} k_i\,(\lambda-\alpha_i)^6 \equiv a_\lambda^6.$$

Dabei unterliegen nach dem schon oft erwähnten Rosanes'schen Fundamentalsatz die α der einzigen Bedingung, Wurzeln einer zu f conjugirten Form zu sein. Die sämmtlichen Sextupel α sind somit durch die zu f conjugirte Gruppe (d. h. die φ umschriebenen Polsechsflache von F_2) dargestellt.

Werden ein resp. zwei resp. drei α unbestimmt, so dass man sie gleich λ nehmen darf, so reducirt sich die rechte Seite von (32) auf die Summe von fünf resp. vier resp. drei Potenzen. Die bezüglichen Wurzelsysteme α sind dann durch die zu den ersten, zweiten, dritten Polaren von f conjugirten Gruppen repräsentirt. Das letzte findet offenbar, wie ja auch bekannt, nur statt, wenn die schon Nr. 126 erwähnte Invariante B (Sylvesters Catalecticante) verschwindet (wenn also die F_2 zum Kegel wird).

Die beiden andern Gruppen entsprechen der ∞^3- resp. ∞^2-Schaar der φ umschriebenen Polfünf- resp. -vierflache von F_2.

Nun ging aus a_λ^6 (32) die Gleichung von F_2 hervor, wenn man erst die Form a_s (10) und daraus die andere a_σ^2 bildete.

Bei der Darstellung (32) geht dabei irgend ein Term der rechten Seite

(33) $k_i(\lambda-\alpha_i)^6$ über in $s_0\,\alpha_i^6 - s_1\,\alpha_i^5 + s_1\,\alpha_i^4 - s_1\,\alpha_i^3 + s_4\,\alpha_i^2 - s_5\,\alpha_i + s_6$
$= (\sigma_0\,\alpha_i^3 - \sigma_1\,\alpha_i^2 + \sigma_2\,\alpha_i - \sigma_3)\ (\tau_0\,\alpha_i^3 - \tau_1\,\alpha_i^2 + \tau_2\,\alpha_i - \tau_3)$,
mithin ist die Gleichung der zur Form f (32) gehörigen F_2:

$$(34)\ F_2 \equiv a_\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=6} k_i\,(\sigma_0\,\alpha_i^3 - \sigma_1\,\alpha_i^2 + \sigma_2\,\alpha_i - \sigma_3)^2 = 0.$$

Dabei sind die in's Quadrat erhobenen Klammerfaktoren rechts offenbar die linken Seiten der Gleichungen der sechs Ebenen α_i der cubischen Curve N_3.

Diese Darstellung (34) ist aber wieder die bekannte der Flächen zweiter Ordnung vermöge eines ihrer Polsechsflache. Geht der Index i nur bis 5 resp. 4, so geht die Darstellung über in die vermöge der Polfünf- resp. vierflache.

Und endlich, geht i nur bis 3, so besitzt die F_2 ein Poldreiflach, ist also ein Kegel; und in der That war ja die Determinante der Fläche F_2 identisch mit der Catalecticante B. (cf. pg. 201.)

Dies Resultat drücken wir kurz so aus:

υ) „Der binären Darstellung der Formen sechsten Grades f als Summen von sechs, fünf, vier sechsten Potenzen entspricht in eindeutiger Weise die quaternäre Darstellung der (eine cubische Curve φ stützenden *)) Flächen zweiter Ordnung als Summen von sechs, fünf, vier, zweiten Potenzen (d. i. mittelst ihrer φ umschriebenen Polsechs-fünf-vierflache).

Die die binäre Darstellung leistenden Sechs-Fünf-Viertupel sind durch die zu f, ihren ersten und zweiten Polaren conjugirten Gruppen dargestellt.

Verschwindet die Catalecticante B von f, so

---

*) Umgekehrt geht aus Satz (φ_1) hervor, dass man bei Zugrundelegung einer ganz beliebigen Fläche zweiter Ordnung den Satz (υ) immer anwenden kann, sobald man zur Curve φ irgend eine irgend einem Poltetraeder der Fläche eingeschriebene cubische Raumcurve nimmt. Vgl. die analoge, bekanntere Theorie der Ebene (Nr. 145).

lässt sich f als Summe von drei Potenzen da stellen und F_2 wird ein Kegel."

Das letzte können wir auch so ausdrücken:

Die Catalecticante B von f verschwindet, wenn zwisch den dritten Differentialquotienten von f eine lineare Identi besteht (denn dann giebt es cf. §. 7 eine zu ihnen conjugi cubische Form).

Daran schliesst sich dann der noch speciellere (später v Wichtigkeit werdende) Fall, dass sich f als Summe von z (sechsten) Potenzen darstellen lässt, wenn zwischen den vierten Differentialquotienten von f drei lineare Identitä stattfinden. Denn dann giebt es nach dem citirten §. 7 e zu ihnen conjugirte quadratische Form.

Aus der Bildung der Differentialquotienten folgt sof dass die Bedingungen für diesen Fall auch durch das schwinden (der Kerne) (cf. §. 2) der Matrix:

$$(34) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0$$

ersetzt werden können.

Die Gleichung der F_2 wird in diesem Falle von der Fo

$$F_2 \equiv k_1 \, A_1^2 + k_2 \, A_2^2 = 0$$

d. h. ein zu den Ebenen α_1, α_2 der Curve φ (N_3) harmonisch Ebenenpaar.

υ_1) „Finden zwischen den vierten Differe tialquotienten von f drei lineare Identitäte statt (d. h. verschwindet die Matrix (34)), so gieb es eine zu ihnen conjugirte quadratische Form

$$(35) \quad (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2).$$

Dann zerfällt die eine cubische Curve stützende (und das Punktsextupel f ausschne dende) Fläche F_2 in ein zu den Ebenen α_1, α_2 von harmonisches Ebenenpaar.

Der Satz gilt, wie die Sätze υ, auch umgekehrt."

138. Ganz ähnlich nimmt auch die zu einer F_2 gehörige Curve H_3 (31) eine canonische Gestalt an (ganz wie der Kegelschnitt H in Nr. 52).

Denn durch Einsetzen der nach zwei Elementen polarisirten vierten Differentialquotienten der Form f (32), wo aber der Index i nur bis 4 gehen mag *), geht H_3 (31) nach leichter Rechnung über in:

$$(36)\quad H_3 \equiv \sum_i \sum_k \sum_l (k_i k_k k_l A_i A_k A_l D^2_{ikl}) = 0 \; (i, k, l, = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{oder auch} \equiv \sum_i \frac{D_i^2}{k_i A_i} = 0$$

$$\text{wo } (37) \begin{cases} A_i \equiv \sigma_0 \alpha_i^2 - \sigma_1 \alpha_i + \sigma_0 \; (i = 1, 2, 3, 4) \\ D_i \equiv D_{klm} = [(\alpha_k - \alpha_l)(\alpha_k - \alpha_m)(\alpha_l - \alpha_m)] \end{cases}$$

„Demnach ist (36) die Darstellung einer zu einer gegebenen cubischen Curve φ in der Hurwitzschen Beziehung stehenden zweiten cubischen Curve mittelst der φ um- und ihr einbeschriebenen Tetraeder."

Daher findet der Satz der Ebene (Nr. 54 π II): „Stehen zwei Kegelschnitte in der Beziehung, dass es ein dem einen um- und dem andern einbeschriebenes Dreieck giebt, so giebt es solcher Dreiecke unendlich viele" folgende (nicht vollkommen analoge) Erweiterung:

φ) „Stehen zwei cubische Curven im Raume in der Beziehung, dass es ein der einen (φ) um- und zugleich der andern (ψ) einbeschriebenes Tetraeder giebt, so giebt es in der ∞^4-Schaar von diesem

*) Wir wollen uns auf den Fall der Poltetraeder beschränken, obschon für Polfünf- und -sechsflache die erste Form der Gleichung (36) sich ganz analog erweitert ($i, k, l, = 1, 2, \ldots$ bis 5 resp. 6).

Tetraeder einbeschriebenen cubischen Curven noch *dreifach* *) unendlich viele, für die es dann (einfach) unendlich viele Tetraeder giebt, die irgend einer von ihnen ein- und φ umbeschrieben sind.

Ihre Gleichung ist (36), sobald man unter den k_i **) variable Coefficienten versteht, während

---

*) Demnach ist es für die dem Tetraeder einbeschriebenen cubischen Curven (ψ) nur eine Bedingung, zu φ in der Hurwitz'schen Beziehung zu stehen.

Diese kann man mit Rücksicht auf das Spätere so formuliren.

Die sechs Kanten des Tetraeders repräsentiren sechs Axen der Curve φ, die zugleich Sehnen der andern, ψ, sind. Im Allgemeinen giebt es dann keine weitere Axe von φ, die Sehne von ψ wäre. Giebt es aber eine, dann existiren auch noch unendlich viele und die Curve ψ steht dann zu φ in der Hurwitz'schen Beziehung. Man kann daher sagen:

„Die beiden im Satze (φ) angenommenen cubischen Curven (φ) (ψ) stehen dann in der Hurwitz'schen Beziehung sobald es *eine* weitere Axe von φ giebt, die zugleich Sehne von ψ ist."

**) Nimmt man andrerseits zwei beliebige der Curve φ umschriebene Tetraeder an, so geht (cf. Satz ρ) durch die Ecken derselben eine einzige bestimmte Curve H_3, die in der Form (36) darstellbar sein muss. Dann handelt es sich nur noch darum, die Coefficienten k_i zu bestimmen, was so geschieht.

Sind die Argumente der beiden Ebenenquadrupel von φ resp.

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4; \qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$$

so muss es eine bestimmte binäre Form sechsten Grades f geben, die in den beiden Formen

$$\sum_1^4 k_i\,(\lambda-\alpha_i)^6; \qquad \sum_1^4 k'_i\,(\lambda-\beta_i)^4$$

darstellbar sein muss.

Die Identität beider liefert aber sieben Gleichungen, linear und homogen in den acht Grössen k_i, k_i' wodurch ihre Verhältnisse eindeutig bestimmt sind.

die D_1 und A_1 die obige (jetzt auf unser Tetraeder bezügliche) Bedeutung haben."

Die canonische Form der Curven H_3 wird von grösserer Bedeutung bei der Betrachtung der binären Form f auf dem (Norm-)Kegelschnitt der Ebene, die uns bald begegnen wird.

Der zum Satze (φ) parallele Satz für die Flächen F_2, die ein gegebenes φ umschriebenes Tetraeder zum Poltetraeder haben, ist dagegen dem bezüglichen Satze der Ebene (Nr. 55 π I) ganz analog. Denn dieser hiess rein geometrisch: „Giebt es ein einem Kegelschnitt φ umschriebenes Dreiseit, das Poldreiseit eines zweiten ist, so giebt es unendlich viele und der zweite Kegelschnitt stützt den ersten."

Hier, im Raume, hat man mit Rücksicht auf Gleichung (34) sofort:

φ_1) „Stehen eine Fläche zweiter Ordnung F_2 und eine cubische Raumcurve φ in der Beziehung, dass es ein φ umschriebenes Poltetraeder von F_2 giebt, so giebt es unendlich viele solche und die Fläche stützt die Curve.

Denn seien

$$(38) \quad y_1 = 0, \;\; y_2 = 0, \;\; y_3 = 0, \;\; y_4 = 0$$

die Ebenen des Tetraeders, so lässt sich bekanntlich die F_2 in die Gestalt bringen:

$$(39) \quad \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \mu_3 y_3^2 + \mu_4 y_4^2 = 0.$$

Ist dann auf φ in bekannter Weise eine Parametervertheilung ausgebreitet, und sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Argumente der vier Tetraederebenen, so lautet die zugehörige binäre Form sechsten Grades:

Damit ist also auch die Aufgabe der Nr. 132 auf eine zweite Weise gelöst. Auf die explicirte Darstellung der Grössen k_i (wie auch damals der Grössen μ, ν, π (29)) soll verzichtet werden.

(40) $\mu_1 (\lambda - \alpha_1)^4 + \mu_2 (\lambda - \alpha_2)^4 + \mu_3 (\lambda - \alpha_3)^4 + \mu_4 (\lambda - \alpha_4)^4$ [redacted] 0.

Dann ist (39) diejenige F_2, die φ stützt und [redacted]it φ das Punktsextupel (40) gemein hat."

139. Die Untersuchung in der Ebene (§. 17 ff.) [redacted]be-schäftigte sich zuerst mit den einem Kegelschnitt φ umsch[redacted]ie-benen Poldreiseiten eines Kegelschnitts F. Die Ecken di[redacted]ser Dreiseite (deren Seiten auf φ eine Involution dritter Ord[redacted]ng bildeten) lagen auf einem andern Kegelschnitt H. Di[redacted] zu dieser Involution auf φ conjugirte Gruppe (Involution) lie[redacted]rte die Poldreiseite eines Kegelschnitts F' und ihre Ecken l[redacted]en auf einem weiteren H'.

Aehnliche Verhältnisse gelten auch für unsere je[redacted]ige Entwicklung, indem wir die zur gegebenen Involution vi[redacted]ten Grades (auf φ) conjugirte (dreigliedrige) Gruppe in's [redacted]ge fassen.

Die gegebene Involution sei

$$(41)\ a_\lambda^4 + k\, b_\lambda^4,$$

die conjugirte Gruppe

$$(42)\ \nu_1 \varphi_1(\lambda) + \nu_2 \varphi_2(\lambda) + \nu_3 \varphi_3(\lambda).$$

Dann bilden die vier Elemente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ (nach N[redacted]. 5) das Wurzelsystem einer Form (42), wenn ihre homog[redacted]nen symmetrischen Funktionen s_i ($i = 0, 1, .. 4$) den Bedingu[redacted]gen genügen

$$(43)\ a_s = 0,\ b_s = 0.$$

Daraus folgt sofort, mit Hülfe der vielbenützten [redacted]nt-wicklung der Nr. 21, dass drei Elemente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ ei[redacted]nem Quadrupel (42) angehören unter der Bedingung *)

*) Dies ist also nach der Terminologie des §. 2 die quadra[redacted]sche Schnittpunktsgleichung erster Ordnung der R_4^2:

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda)\ (i = 0, 1, 2).$$

$$(44)\quad \mathrm{H}' \equiv \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3, & b_1\sigma_0 + b_2\sigma_1 + b_3\sigma_2 + b_4\sigma_3 \end{vmatrix}$$

wo also die A resp. B die nach den drei Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ polarisirten ersten Differentialquotienten von a_λ^4, resp. b_λ^4 sind. Dies liefert den Satz:

χ) „Ist auf der cubischen (Norm-)Curve N_3 die Involution (41) gegeben, so liegen die Eckpunkte der ∞^2-Schaar von N_3 umschriebenen Tetraedern, deren bezügliche (Argumenten-) Quadrupel durch die zu (41) conjugirte Gruppe (42) dargestellt sind, auf einer Fläche zweiter Ordnung H′ (44)."

Und da man umgekehrt von einer beliebigen Gruppe (42) (anstatt von einer beliebigen Involution (41)) ausgehen kann, so erhält man so den bekannten[47]) Satz:

χ_1) „Die Ecken irgend dreier einer cubischen Raumcurve φ umschriebenen Tetraeder liegen auf einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung."

Die nähere Untersuchung dieser Fläche und ihre Beziehungen zur Involution finden eine passendere Stelle im Anschluss an die Darstellung der Involution auf dem Normkegelschnitt resp. der Theorie der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung.

Dabei wird sich herausstellen, dass diese Flächen H′ vollständig dadurch charakterisirt sind, dass drei Axen der cubischen Curve ganz auf ihnen liegen *).

*) Im Uebrigen treffen sie die Curve in den sechs Punkten, deren Argumente den sechs Doppelelementen der durch die Fläche auf der Curve festgelegten Involution zugehören.

Zunächst verlassen wir die cubische Curve und studiren die binäre Form sechsten Grades oder die biquadratische Involution auf dem Normkegelschnitt, für die viele Eigenschaften durch einfache Uebertragungen aus diesem Paragraphen gewonnen werden werden. Umgekehrt wird dann wieder die ebene Theorie die räumliche weiter führen.

§. 26.

Die binäre Form sechsten Grades auf dem Normkegelschnitt der Ebene.

140. Nach Reye[48] trägt (stützt, ist apolar zu) eine ebene Curve dritter Ordnung F_3

$$(1)\quad a_x^3 = \Sigma\,\Sigma\,\Sigma\, a_{ikl}\, x_i\, x_k\, x_l = 0\ (i,k,l, = 0, 1, 2)$$

einen Klassenkegelschnitt Φ_2 (und umgekehrt ruht (stützt sich) der letztere auf der ersteren):

$$(2)\quad u_\alpha^2 = \Sigma\,\Sigma\, u_{ik}\, \alpha_{ik}\ (i,k = 0, 1, 2)$$

unter den drei Apolaritätsbedingungen (des Verschwindens der drei bilinearen Invarianten beider):

$$(3)\quad (a_r\alpha)^2 = \Sigma\,\Sigma\, a_{rik}\, \alpha_{ik} = 0\ (r = 0, 1, 2)$$

d. h. wenn der Kegelschnitt Φ_2 mit **jedem** Punkte der Ebene eine zu F_3 apolare Curve dritter Classe bildet (so dass die bilineare Invariante beider verschwindet), oder was dasselbe ist, **wenn** Φ_2 **auf dem Netze der Polarkegelschnitte von** F_3 **ruht.**

Wird statt des Kegelschnitts Φ_2 wieder der Normkegelschnitt eingeführt:

$$\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}\ \left\{\begin{matrix}\rho x_0 = 1, & \rho x_1 = 2\lambda, & \rho x_2 = \lambda^2\\ \sigma u_0 = \lambda^2, & \sigma u_1 = -\lambda, & \sigma u_2 = 1,\end{matrix}\right\}\ \text{oder}$$

$$\left\{\begin{matrix}4\, x_0\, x_2 - x_1^2 = 0 & (N_2)\\ u_0\, u_2 - u_1^2 = 0 & (\mathrm{N}_2)\end{matrix}\right.$$

so nehmen die Bedingungen (3) die einfachere Form an:

$$(6)\quad a_{r02} = a_{r11}\ (r = 0, 1, 2).$$

„Diese Bedingungen (6) sind vollkommen ausgedrückt, wenn man statt der Coefficienten von (1) die andern einführt

$$(7)\quad a_{ikl} = a_{i+k\,.\,1}\ (i+k+l = 0, 1, \ldots 6).$$

Dann geht die F_3 (1) über in:

$$\begin{aligned}(8)\ 0 = a_{xxx} \equiv x_0 \{& x_0 (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) + \\ &+ x_1 \{x_0 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2) + \\ &+ x_2 \{x_0 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2) + \\ x_1 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2) &+ x_2 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2)\} \\ x_1 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2) &+ x_2 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2)\} \\ x_1 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2) &+ x_2 (a_4 x_0 + a_5 x_1 + a_6 x_2)\}.\end{aligned}$$

Aus der Wahl des Normkegelschnitts folgte (Nr. 29), dass die homogenen Coordinaten eines Punktes der Ebene identisch sind mit den homogenen symmetrischen Funktionen σ_i zweier Elemente $\mu_1\ \mu_2$ (der Parameter der durch den Punkt gehenden Tangenten von N_2).

Daraus folgt jetzt, mit Hülfe der Zerlegung der Nr. 21, dass a_{xxx} (8) aus der einfacheren Form:

$$(9)\quad a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6$$

hervorgeht, wenn man von den sechs Elementen $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_6$, aus denen die s_k gebildet sind, immer drei einander gleich setzt:

$$(10)\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1,\ \ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_2.$$

Um dies auch in der Bezeichnung auszudrücken, schreiben wir statt (8):

$$(11)\quad a_\sigma^3 = 0.$$

Das dieser Curve mit N_2 gemeinsame Punktsextupel wird:

$$(12)\quad f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_\lambda = 0,$$

wo a_s (9) aus a_λ durch Polarisation nach den sechs Elementen λ hervorgeht.

Daher können wir die Gleichung von F_3 auch schreiben:

$$(13)\ a_\sigma^3 \equiv a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0.$$

Die Klammerfaktoren in (8) sind die zweiten Ueberschiebungen der vierten Differentialquotienten von f (12) über die Form mit den Wurzeln $\mu_1\ \mu_2$.

So gelangt man, ebenso wie Nr. 123 zu dem entsprechenden Raumsatz, hier zu folgendem:

α) „Durch irgend sechs Punkte eines Kegelschnitts φ (auf dem ein Parameter λ ausgebreitet sei)

$$(12)\ a_\lambda = 0$$

geht eine einzige ihn stützende F_3, deren Gleichung mittelst einer bestimmten Collineation der Ebene stets in die Gestalt gebracht werden kann

$$(8)\ (11)\ (13)\ a_\sigma^3 \equiv a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0.“$$

141. Die dualistische Entwicklung kann man wie in Nr. 124 durchführen: der kürzere Weg ist aber der der Nr. 125. Gerade so wie dort gelangt man zu folgender Regel *):

„Ist auf N_2 ein Tangentensextupel gegeben

$$(14)\ b_\lambda^6 = 0,$$

*) Diese sagt also (cf. pg. 45) geometrisch einfach aus, dass die zu einem Tangentensextupel (14) von N_2 gehörige Φ_3 erhalten wird als Umhüllungscurve der in Bezug auf N_2 gebildeten Polaren der Punkte der zum Punktsextupel (14) von N_2 gehörigen F_3 oder kürzer: „beide Curven sind in Bezug auf den Normkegelschnitt reciprok.“ Und dies ist ja evident.

so findet man die Gleichung der auf N_2 ruhenden und mit N_2 das Tangentensextupel (14) gemein habenden Curve dritter Classe Φ_3, wenn man zunächst die Gleichung der (dualistischen) F_3 bildet

$$(15)\quad b_\sigma^3 = 0,$$

und dann in dieser die Substitutionen vornimmt:

$$(16)\quad \sigma_0 = u_2,\ \sigma_1 = -2u_1,\ \sigma_2 = u_0.\text{“}$$

Daher wird die Gleichung der gesuchten Φ_3:

$$(17)\quad \Phi_3 = b_0 u_2^3 - 6 b_1 u_2^2 u_1 + 3 b_2 (u_2^2 u_0 + 4 u_2 u_1^2) - b_3 (12 u_0 u_1 u_2 + 8 u_1^3) + \ldots = 0,$$

während die auf das Punktsextupel a_λ^6 bezügliche F_3 lautete:

$$(18)\quad F_3 = a_6 x_2^3 + 3 a_5 x_2^2 x_1 + 3 a_4 (x_2^2 x_0 + x_2 x_1^2) + a_3 (6 x_0 x_1 x_2 + x_1^3) + \ldots = 0.$$

Die bilineare Invariante von F_3 und Φ_3 ist wieder identisch mit der der binären Formen (wie man auch ohne Rechnung ganz wie in Nr. 125 schliesst), und man hat *):

β) „Die bilineare Invariante zweier binären Formen sechsten Grades $(a_\lambda^6, b_\lambda^6)$ ist identisch mit der zweier ternären Formen dritten Grades, die, $= 0$ gesetzt, eine F_3, resp. Φ_3 darstellen, die einen (sonst beliebigen) Kegelschnitt tragen resp. auf ihm ruhen, und mit ihm die gegebenen Sextupel a_λ, b_λ gemein haben.

Demnach bedingt die Apolarität der binären Formen die der ternären und umgekehrt.“

Durch Anwendung dieses Satzes auf mehrere (auf dem Normkegelschnitt dargestellte) solche Formen a_λ^6, $a_{1\lambda}^6$, ...

*) Ueber die Verallgemeinerung dieses Satzes cf. Cap. III.

und die zu ihnen conjugirten Gruppen erhält man ohne Weiteres:

β') „Ist auf einem Kegelschnitt φ eine μ-gliedrige Gruppe sechsten Grades

(19) $k_1\, a_{1\lambda} + k_2\, a_{2\lambda} + \ldots k_\mu\, a_{\mu\lambda}$ $(\mu = 1, 2, \ldots 6)$

nebst der zu ihr conjugirten ν $(\nu = 7 - \mu)$-gliedrigen Gruppe:

$$(20)\quad k'_1\, b_{1\lambda} + k'_2\, b_{2\lambda} + \ldots k'_\nu\, b_{\nu\lambda}$$

dargestellt, so steht die μ-gliedrige Gruppe der Curven dritter Ordnung F_3 (die N_2 stützen und aus N_2 die Punktsextupel (19) ausschneiden) zu den ν-gliedrigen der Curven dritter Classe Φ_3 (die auf N_2 ruhen und mit N_2 die Tangentensextupel (20) gemein haben) in der Beziehung,
dass sowohl die Gruppe F_3 die vollständige die Gruppe Φ_3 nebst N_2 stützende Gruppe,
als die Gruppe Φ_3 die vollständige auf der Gruppe F_3 nebst N_2 ruhende Gruppe ist."

Dies wird gleich nachher auf die Polvielflache einer Curve F_3 (die einem auf der letzteren ruhenden Kegelschnitt φ umbeschrieben sind) Anwendung finden.

142. Drei Punkte der Ebene (x) (y) (z) bilden bekanntlich ein Poldreieck (oder ein in Bezug auf die Curve conjugirtes Punktetripel) einer Curve dritter Ordnung (1), wenn sie der Bedingung genügen

$$(21)\quad a_{xyz} = 0$$

d. h. wenn die nach den Punkten polarisirte Form (1) verschwindet.

Für unsere besonderen Curven F_3 (8) (oder (11) (13)) wird dann aber die linke Seite von (21) identisch mit der Form

(9) a_8

wenn man unter den x_1, y_1, z_1 die homogenen symmetrischen Funktionen der resp. Argumentenpaare $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_3 \lambda_4)$ $(\lambda_5 \lambda_6)$ versteht.

Nennen wir daher ein Sechsseit $(a\ b\ c\ d\ e\ f)$ dann ein Polsechsseit einer ebenen Curve dritter Ordnung, wenn alle Punktetripel der Form

(21) $(a\ b)\ (c\ d)\ (e\ f)$

Poldreiecke der Curve sind, so haben wir mit Rücksicht auf die Symmetrie von (9) in den sechs Elementen λ:

γ) „Irgend ein in Bezug auf eine einen Kegelschnitt φ stützende Curve dritter Ordnung F_3 conjugirtes Punktetripel (Poldreieck) bestimmt (mittelst der drei von ihm an φ gehenden Tangentenpaare) ein *Polsechsseit* der Curve F_3“ oder auch: „ein solches Punktetripel zieht *neun* weitere gleicher Art nach sich, die alle, dem Typus (21) gemäss, demselben Sechsseite angehören.“

„Es giebt eine ∞^5-Schaar solcher φ umschriebenen Polsechsseite von F_3.

Die bezüglichen Tangentensextupel (auf φ) stellen die ganze zum Schnittpunktsextupel von F_3 und φ conjugirte Gruppe dar.“

Fünf Seiten eines solchen Polsechsseits kann man als Tangenten von φ beliebig annehmen, dann ist die sechste eindeutig bestimmt und zwar nach Satz (β') durch folgende Construktion:

Man construire diejenige Curve dritter Klasse Φ_3, die die gegebenen fünf Seiten berührt, und auf der Curve F_3, sowie auf φ ruht. Diese hat mit N_2 eine sechste Tangente gemein, die die gewünschte sechste Seite liefert.

Ebenso wie sich der Satz (β') an (β) anschloss, so kann

man auch hier den Satz (γ) für eine ganze Gruppe von Curven F_3 formuliren, analog dem Raumsatze (η) Nr. 128. Dies bleibe dem Leser überlassen.

143. Der Übergang von den Polsechs- zu den Polfünf- und -vierseiten von F_3, die φ umbeschrieben sind, läuft gleichfalls zunächst den Entwicklungen von Nr. 129 ff. parallel.

Wird eine Seite des Polsechsseits einer F_3 unbestimmt, so entsteht ein Polfünfseit, d. h. ein solches, in dem jede Seite die gemischte lineare Polare je zweier Gegenecken des von den vier übrigen gebildeten Vierseits ist.

Wird wieder eine Seite dieses Polfünfseits unbestimmt, so resultirt ein Polvierseit, für das je zwei Gegenecken mit jedem Punkte der Ebene ein Poldreieck bilden, oder ein sogenanntes Paar conjugirter Pole der F_3 sind. Dann zerfällt der Polarkegelschnitt jeder Ecke in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt die Gegenecke der ersten ist.

Umgekehrt bestimmt irgend ein Paar conjugirter Pole nach Satz (γ) ein φ umschriebenes Polvierseit von F_3.

Dann durchlaufen bekanntlich die Gegenecken aller dieser Polvierseite die Hesse-Steiner'sche Curve von F_3 und bestimmen auf der ersteren die zur letzteren gehörige Hesse-Steiner'sche Correspondenz.

Wir können daher im Folgenden von der ausgedehnten Theorie dieser Correspondenz Gebrauch machen, um sie für die uns interessirenden Apolaritätsverhältnisse der binären Form sechsten Grades und der biquadratischen Involution fruchtbar zu machen.

Rückwärts wird dann dadurch wieder die Raumtheorie des §. 25 gefördert werden.

144. Zunächst gilt der zu Satz (κ) (Nr. 129) analoge Satz:

δ) „Die Seiten der einem Kegelschnitt φ umschriebenen (∞^3 linearen) Schaar der Polfünf-

seite, resp. der (∞^1 linearen) Schaar (Involution) **der** Polvierseite einer φ stützenden und aus φ das **Sex**tupel f - a_λ ausschneidenden F_3 sind durch **die** zur Gruppe der ersten resp. zweiten Polaren **von** f conjugirten Gruppen dargestellt."

Desgleichen mögen die den Sätzen (λ) (ρ) (σ) (τ) entsprechenden Sätze hier in einen zusammengezogen werden:

ε) „Es sei m_1, m_2, m_3 *irgend* ein Tripel von positiven ganzen Zahlen (0 incl.), das der Bedingung genügt

$$(22)\quad m_1 + 2\,m_2 + 3\,m_3 = 6.$$

Sind dann m_1, m_2, m_3, φ umschriebene Sechs-Fünf-Vierseite gegeben, so existirt eine bestimmte F_3, für die dieselben Polseite sind, und welche φ stützt. Die Bestimmung dieser Curve F_3 geschieht so:

Man denke sich *alle* (∞^0, ∞^1, ∞^2 linearen) Schaaren von Curven dritter Classe Φ_3 aufgestellt, die den gegebenen Sechs-Fünf-Vierseiten einbeschrieben sind und auf φ ruhen. Diese Φ_3 bilden, zusammengefasst, eine sechsgliedrige Gruppe.

Dann ist die gesuchte F_3 diejenige, *die alle diese* Φ_3 *und zugleich* φ *stützt.*"

144. Die Gleichung (31) (Nr. 133)

$$(23)\quad \mathrm{H}_3 = 0$$

stellt hier den Ort der Punkte dar, von denen ein solches Tangentenpaar an den Kegelschnitt φ geht, das zugleich ein Seitenpaar eines (φ umschriebenen) Polvierseits von F_3 ist d. h. (23) ist die Gleichung der Hesse-Steiner'schen Curve von F_3, was mit der bekannten Darstellung zusammenfällt.

Ihre Schnittpunkte mit φ sind durch das Verschwinden der Covariante H (Nr. 126, (23)) dargestellt.

In Folge dessen lautet der dem Satze π (Nr. 134) parallele Satz:

φ) „Man gehe von irgend einem Sextupel H auf einem Kegelschnitt φ aus. Dann gehen einmal durch das Punktsextupel H fünf Curven H_3, die zu φ in der Beziehung stehen, dass es einfach unendlich viele φ um- und H_3 einbeschriebene Vierseite giebt.

Diese Vierseite sind Polvierseite von fünf weiteren Curven F_3, die φ stützen.

Diese Curven F_3 und H_3 stehen in der Beziehung, dass jede der Curven H_3 die Hesse-Steiner-sche einer bestimmten ihr zugeordneten F_3 ist.

Die fünf Curven F_3 schneiden aus φ fünf Sextupel aus: diese sind diejenigen, die alle das Sextupel H als Covariante H besitzen.

Die fünf Schaaren von Vierseiten stellen auf φ die fünf Involutionen (vierten Grades) mit denselben sechs Doppelelementen H dar."

145. Wir kommen nunmehr zur canonischen Form der Curven F_3 und H_3, die in den damaligen Entwicklungen (Nr. 137 ff.) ihr deutliches Vorbild hat.

Ist die Form $f \equiv a_\lambda^6$ wieder als Summe von Potenzen dargestellt:

(24) $f = \Sigma\, k_i\, (\lambda - \alpha_i)^6$ ($i = 1$ bis 6 resp. 5 resp. 4),

so wird die zugehörige Form a_s nach einfacher Rechnung:

(25) $a_s \equiv \Sigma k_i (\rho_0 \alpha_i^2 - \rho_1 \alpha_i + \rho_2)(\sigma_0 \alpha_i^2 - \sigma_1 \alpha_i + \sigma_2)(\tau_0 \alpha_i^2 - \tau_1 \alpha_i + \tau_2)$

wo die ρ, σ, τ die frühere Bedeutung haben: mithin die Gleichung von F_3:

(26) $a_\sigma^3 \equiv \Sigma\, k_i\, (s_0\, \alpha_i^2 - s_1\, \alpha_i + s_2)^3$ *) $= 0$.

Dabei waren die α_i die Argumente der dem Kegelschnitt φ (den F_3 stützte) umschriebenen Polsechs- resp. -fünf- resp. -vierseite von F_3.

Umgekehrt hat also der Kegelschnitt φ nur den Bedingungen zu genügen, auf F_3 zu ruhen, d. h. man kann als Kegelschnitt φ irgend einen des auf F_3 „ruhenden Gewebes" nehmen. Dieses ist aber bekanntermassen das Polarkegelschnittgewebe einer bestimmten Curve dritter Klasse Φ_3 **) der „associirten" Curve von F_3.

Demnach haben wir:

η) „Die bekannte Darstellung der Gleichung einer allgemeinen, beliebigen Curve dritter Ordnung als Summe von 6, 5, 4 dritten Potenzen erscheint hier in dem Lichte, dass die Curve bezogen gedacht wird auf die Polsechs-fünf-vierseite, die irgend einem der Polarkegelschnitte ihrer associirten Curve umbeschrieben sind.

Dadurch wird sie geradezu identisch mit der

---

*) Die Klammerfaktoren, deren dritte Potenzen in (26) auftreten, sind evidentermassen die linken Seiten der Tangenten α_i des Kegelschnitts φ.

**) Dies ist die bekannte Curve

$$\Pi \equiv ST - T\Sigma = 0$$

cf. die Vorlesungen von Clebsch-Lindemann über Geometrie, Bd. II, pg. 577. Ich nenne sie die zu F_3 associirte nach dem Vorgang von Battaglini (Sulle forme ternarie sizigetiche: In Memoricum Dom. Chelini).

Mit Rücksicht auf die eingehende Behandlung[49] der Curven dritter Ordnung im Apolaritätssinn bei Clebsch, Lindemann, Battaglini, sowie weiter bei Rosanes, Em. Weyr, S. Kantor u. A. ist die Textentwicklung eine etwas gedrängtere geworden.

Insbesondere sei auf die wichtige Abhandlung von Rosanes: Über ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle's Journal Bd. 76, verwiesen.

bekannten Darstellung der binären Form sechsten Grades (die die Schnittpunkte der gegebenen Curve mit jenem Kegelschnitte auf dem letzteren dargestellt) als Summe von sechs, fünf, vier sechsten Potenzen.“

146. Dagegen fällt die sich hieran anschliessende canonische Form der Curven H_3 geradezu mit der in Nr. 138 gegebenen (36) zusammen, so dass sie hier nicht wiederholt zu werden braucht.

Bekanntermassen gehören zu einer beliebig gegebenen Curve dritter Ordnung H_3 drei andere, deren Hesse'sche sie ist, sowie drei Klassencurven, die Cayley'schen jener drei, die Umhüllungscurven der Verbindungslinien je zweier (den drei Hesse-Steiner'schen Correspondenzen gemäss) sich entsprechender Punkte der Curve H_3.

Somit gilt der zu (η) parallele Satz (cf. Nr. 52):

η') „Die bekannte Darstellung der Gleichung einer allgemeinen beliebigen Curve dritter Ordnung H_3 als Summe von Produkten von je drei linearen Formen (*die alle Combinationen zu dreien* von sechs *) resp. fünf resp. vier solchen Formen repräsentiren) und die auf dreierlei Weise möglich ist, erscheint hier in dem Lichte, dass man die Curve bezieht auf die Polsechs- -fünf- -vierseite einer der Curven F_3, die H_3 zur Hesse'schen Curve besitzen, die irgend einem der Polarkegelschnitte der associirten Curve umbeschrieben sind etc. wie in (η).“

147. Das Verschwinden der Invariante B (vierten Grades) von f (24) war die Bedingung, dass sich f als Summe von nur

*) Man nehme jetzt in Formel (36) (Nr. 138) den Index i wieder von 1 bis 6 resp. 5 resp. 4.

drei (sechsten) Potenzen darstellen liess. Dann geht auch in der Potenzdarstellung von F_3 (26) der Index i nur von 1 bis 3, desgleichen in der zugehörigen Darstellung von H_3, d. h. H_3 zerfällt in drei Gerade, die ein φ umschriebenes Poldreiseit von F_3 bilden.

Dann ist bekanntlich das Doppelverhältniss der Curve F_3 ein aequianharmonisches und es muss die Invariante S derselben verschwinden. In der That überzeugt man sich sofort, dass diese mit der Invariante B von f (bis auf einen Zahlenfaktor) identisch ist.

148. Herr Em. Weyr[50] hatte den Satz aufgestellt:

„Ist auf einem Kegelschnitt eine Tangenteninvolution vierten (n^{ten}) Grades gegeben, so sind ihre Vier(n)seite einer bestimmten Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einbeschrieben."

Diesen Satz können wir jetzt zunächst für den einfachen Fall $n = 4$ in erweiterter Gestalt so aussprechen:

$\varkappa$) „Ist auf einem Kegelschnitt φ irgend eine Tangenteninvolution vierten Grades gegeben, so giebt es eine einzige $C_3\,(F_3)$, für die die Involutionsvierseite Polvierseite sind, und eine einzige $C_3\,(H_3)$ (die Hessiana der ersten), denen die Vierseite einbeschrieben sind. Die erste $C_3(F_3)$ stützt (ist apolar zu) φ.

Ist irgend eines der Vierseite gegeben durch

$$(27)\quad a_x = 0,\ b_x = 0,\ c_x = 0,\ d_x = 0$$

so ist F_3 darstellbar durch:

$$(28)\quad \alpha\,(a_x)^3 + \beta\,(b_x)^3 + \gamma\,(c_x)^3 + \delta\,(d_x)^3 = 0$$

und H_3 durch:

$$(29)\quad \frac{(bcd)^2}{\alpha a_x} + \frac{(cda)^2}{\beta b_x} + \frac{(dab)^2}{\gamma c_x} + \frac{(abc)^2}{\delta d_x} = 0$$

(wo z. B. (abc) die Determinante der Formen a_x, b_x, c_x ist)."

Ganz in derselben Weise werden wir zu dem allgemeinen Satze (cf. Cap. III) geführt *):

$\varkappa_1$) Stützt eine Curve n^{ter} Ordnung F_n (der Ebene) einen Kegelschnitt φ, so lässt sich die linke Seite ihrer Gleichung durch lineare Substitutionen der alten variabeln in die neuen $(\lambda_1 + \lambda_2)$, $(\lambda_1\ \lambda_2)$ in die Gestalt (in der Gordan'schen Schreibweise)

$$(30)\quad a_{\lambda_1^n},\ \lambda_2^n$$

bringen, wo $f \equiv a_\lambda^{2n} = 0$ die Schnittpunkte beider Curven darstellt.

Es giebt unendlich viele φ umschriebene P[illegible]l- $(2\,n)\,(2\,n-1)\ldots(2\,n-p)$ Seite der F_n {und zwar eine $\infty^{2(n-q)-1}$ lineare Schaar von $(2\,n-q)$ Seiten $(q = 0, 1, \ldots n-1)$}, deren (auf φ) zugehörige binäre Formen die zu den q^{ten} Polaren von f conjugirte Gruppe bilden.

Im Speciellen giebt es eine Involution $(n+1^{ten})$ Grades von $(n+1)$ Seiten, die einer zweiten Curve n^{ter} Ordnung (H_n) einbeschrieben sind.

Dann gehört zu jeder Curve F_n (bei gegebenem φ) eine einzige H_n und umgekehrt zu jeder Curve H_n nur eine F_n.

Ist die binäre Form f irgend wie als Potenzsumme dargestellt

---

*) Wegen des Falles $n = 5$ vergleiche die Arbeiten[51] von Lüroth' und Scherrer'. Er umfasst diejenigen Curven vierter Ordnung, für die eine Darstellung ihrer Gleichung als Summe von fünf Biquadraten möglich ist. Dazu ist bekanntlich das Verschwinden einer gewissen Invariante sechsten Grades erforderlich.

Der Satz k_1 selbst ist seinerseits wieder einer grossen Verallgemeinerung fähig, wie sich in Kap. III ergeben wird.

$$(31)\quad f \equiv \Sigma\, k_i\, (\lambda - \alpha_i)^{2n}$$

so geht F_n über in die Form

$$(32)\quad F_n \equiv \Sigma\, k_i\, (s_0\, \alpha_i^2 - s_1\, \alpha_i + s_2)^n \equiv \Sigma\, k_i\, A_i^n = 0$$

wo $A_i = 0$ die Tangente von φ im Punkte $\lambda = \alpha_i$ ist.

Die zugehörige Curve H_n ist dann immer als Summe von Produkten von je n der vorhandenen $(2n - q)$ linearen Formen darstellbar etc. etc.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen Tangenteninvolution $(n+1)^{ten}$ Grades auf φ aus, so giebt es eine einzige $F_{n'}$, für die die Involutions$(n+1)$seite Pol$(n+1)$seite sind und eine einzige $H_{n'}$, denen dieselben einbeschrieben sind.

Die erstere Curve trifft φ in dem $(2n)^{tupel}$

$$a_\lambda^{2n} \equiv f = 0$$

dessen $(n-1)^{te}$ Polaren die zur gegebenen Involution conjugirte Gruppe bilden, und die zweite trifft φ in dem $(2n)^{tupel}$ der Doppelelemente der Involution etc. etc."

149. Kehren wir zurück zu den Curven dritter Ordnung, so möge der Zusammenhang zwischen den Curven F_3 und H_3 noch in folgender Weise ergänzt werden.

Dem entsprechend, dass zu einer Curve H_3 (bei unbestimmtem φ) drei Curven F_3 gehören, giebt es bekanntlich auf H_3 drei Arten von Hesse-Steiner'schen Correspondenzen d. s. drei Arten von zweifach unendlich vielen ihr einbeschriebenen Vierseiten und zwar so, dass irgend zwei Punkte der Curve eine solches Vierseit bestimmen.

Wendet man den Satz von Rosanes (Crelle Bd. 76 l. c. pg. 328):

„Irgend zwei einer Curve dritter Ordnung ein-

beschriebene Vierseite sind einem bestimmten Kegelschnitt umbeschrieben,"
auf zwei Vierseite derselben Art (für die Curve H_3) an, so ist damit der Kegelschnitt φ und zugleich auf ihm die Tangenteninvolution vierten Grades bestimmt, dadurch aber die eine der zu H_3 gehörigen Curven F_3.

150. Wir haben schon einigemal von dem Satze Gebrauch gemacht (wenn er auch erst später bewiesen wird), dass es, wenn man sich eine Involution vierten Grades durch ihre (sechs) Doppelelemente gegeben denkt, fünf zugehörige Involutionen giebt. Das Analogon zu dem Satze pg. 211 lässt sich hier ohne Weiteres aussprechen:

λ) Durch sechs Punkte eines Kegelschnitts φ gehen fünf Curven H_3, denen fünf Curven F_3 je eindeutig zugeordnet sind.

Die einer Curve H_3 ein- φ umbeschriebenen Polvierseite der entsprechenden Curve F_3 bilden die eine der fünf Involutionen auf φ, deren Doppelelemente die Argumente der sechs gegebenen Punkte sind.

Benützen wir des Weiteren die Eigenschaft, dass man die sechs Doppelelemente auch ersetzen kann durch irgend sechs Elementenpaare der Involution (cf. Nr. 187 ff.), so haben wir die Erweiterung des letzten Satzes (λ):

λ_1) *) Durch irgend sechs Punkte in der Ebene

---

*) Lässt man in bekannter Weise den Curven dritter Ordnung durch die gegebenen sechs Punkte die Ebenen des Raumes projektivisch entsprechen, so geht der Kegelschnitt φ in eine rationale Raumcurve sechster Ordnung über, sowie die Punkte der Ebene in die einer Fläche dritter Ordnung (die durch die Curve hindurch geht).

Andrerseits geht bekanntlich durch eine solche Curve nur eine einzige Fläche dritter Ordnung, deren Gleichung pg. 20 ermittelt würde.

nes festen Kegelschnitts φ geht ein Quintupel von urven dritter Ordnung H_3, das aus dem Kegel-hnitt die Doppelelementensextupel von fünf In-lutionen vierter Ordnung mit sechs gemein-men Elementenpaaren ausschneidet.

Diese sechs Elementenpaare sind die Berühr-ıgspunkte der Tangentenpaare der sechs gege-nen Punkte.

Diesen fünf Curven H_3 sind fünf Curven F_3 ein-utig zugeordnet etc.

Je zwei Punkte einer Curve H_3, deren Elementenpaare f φ) ein Quadrupel der zugehörigen Involution bilden, sind jugirte Punkte derselben.

Und endlich, mit vorläufiger Heranziehung des näheren ammenhangs zwischen solchen fünf Involutionen vierter lnung erhält man:

λ_2) Je zwei der fünf Curven H_3 haben noch drei itere Punkte gemein, je drei noch *einen.* Daher bt es solcher weiteren gemeinsamen Punkte ementenpaare) noch *zehn,* die den fünf Curven volutionen) in der Art angehören, wie die zehn

---

Daher liefert die Abbildung von Ebene auf Fläche dritter Ordnung nden interessanten Satz:

„Durch jede der sechs vierfachen Sehnen einer allge-nen rationalen Raumcurve sechster Ordnung geht ein die rve berührendes Ebenenpaar.

Dann giebt es fünf Involutionen vierter Ordnung, die se sechs Paare von Berührungspunkten zu gemeinsamen mentenpaaren besitzen.

Die fünf zugehörigen Doppelelementensextupel werden s der Curve von den Ebenen eines Pentaeders ausge-hnitten, das der einzigen durch die Curve gehenden Fläche itter Ordnung einbeschrieben ist."

Eckpunkte eines Pentaeders den fünf Ebenen derselben. Und daraus folgt:

Jede der fünf Curven (Involutionen) enthält noch sechs der weiteren zehn Punkte (Elementenpaare), die drei ihr angehörige Quadrupel (d. i. drei conjugirte Punktepaare auf der Curve) bilden.

Hier brechen wir vorläufig die Anwendungen auf Curven dritter Ordnung ab, um erst durch weitere Untersuchungen über die Involutionen vierter Ordnung ein reichhaltigeres Material zu gewinnen.

Die direkte Übertragung der Raumsätze des vorigen Paragraphen auf die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und umgekehrt ist in den wichtigsten Fällen angegeben: es kann daher die weitere Durchführung dem Leser überlassen bleiben.

Im nächsten Paragraphen betrachten wir die Involution vierter Ordnung unter dem Gesichtspunkt der Schnittpunktformengruppe einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung und bringen sie dabei vornehmlich in Zusammenhang mit der quadratischen ein- eindeutigen Involution der Ebene.

§. 27.

Die rationalen Curven vierter Ordnung in der Ebene und die quadratische Transformation.

151. Wir haben die biquadratische Involution auf der Normcurve zweiter und dritter Ordnung studirt; es möge auch noch die der vierten und (soweit es nöthig erscheint) der sechsten Ordnung zu Grunde gelegt werden.

Doch sollen beide nicht in den ihnen eigentlich zukommenden Räumen (von vier resp. sechs Dimensionen), sondern, ganz in der Weise des §. 24, im ternären Gebiet betrachtet werden. Dies geschieht für den ersten Fall einfach so

Auf der Normcurve vierter Ordnung

$$(1)\quad \rho x_i = m_i \lambda^i \; (i = 0, 1, \ldots 4)$$

nehmen wir drei (linear unabhängige) Punktquadrupel

$$(2)\quad \varphi_1(\lambda),\; \varphi_2(\lambda),\; \varphi_3(\lambda)$$

an. Jedes derselben liegt auf einem bestimmten Gebilde (Raum)

$$(3)\quad u_{1x} = 0,\; u_{2x} = 0,\; u_{3x} = 0,$$

die eine Gerade gemein haben.

Von jedem Punkte der letzteren geht ein „Raum-"quadrupel an die Curve, dem als Argumente auf der letzteren die Wurzeln einer Form a_λ resp. b_λ etc. zugehören mögen. Dann bilden alle diese Quadrupel, wie aus den §§. 1, 2 hervorgeht, die zu den Formen (2) conjugirte Involution

$$(4)\quad a_\lambda + k b_\lambda.$$

Projicirt man nun die Curve mittelst sämmtlicher durch die Gerade (3) gehenden „Räume" auf eine Ebene, so gelangt man zu einer rationalen Curve vierter Ordnung (R_4^2, resp. P_4^2 etc. oder einfacher auch R, P etc.):

$$(5)\quad \sigma y_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3)$$

deren Schnittpunkttheorem durch

$$(6)\quad a_s = 0,\; b_s = 0$$

gegeben ist (wo a_s, b_s durch Polarisation von a_λ, b_λ (4) nach vier Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ entstehen, d. h. wo a_λ, b_λ die zu (5) gehörigen linearen Schnittpunktformen sind). Dann sind die in den λ linearen und symmetrischen Grössen s_i nichts Anderes, als die im ursprünglichen Raume den Punktcoordinaten x dualistisch gegenüberstehenden (contragredienten) „Raum-"coordinaten. Wir drücken die gegebene Umformung in dem Satze aus:

α) „Die Betrachtung der biquadratischen Involution (resp. der zu ihr conjugirten Gruppe) auf

der biquadratischen Normcurve wird ersetzt durch die der Schnittpunktformen einer ebenen rationalen Curve vierter Ordnung (R, P, etc.)."

152. Die Gleichungen (6) beziehen wir wieder, wie in Nr. 45 ff. auf einen (zunächst noch beliebigen) Normkegelschnitt einer Ebene, auf dem wir den Parameter λ der Curve R aus- gebreitet denken. Dann gilt nach den früheren Entwicklunge (Nr. 46 ff.) der Satz:

β) „Die Gruppe (2) stellt sämmtliche dem Norm- kegelschnitt umschriebene Polvierseite der Kegel schnitte und (damit ihres Büschels)

$$(7) \quad a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0$$

dar, die ihn stützen und aus ihm die Punktqua drupel (4) ausschneiden."

Aus der Entstehung der Formen (7) aus (6) (cf. Nr. 46 folgt dann sofort, dass die vier Grundpunkte des Büsche (7), vermöge ihrer an N_2 gehenden Tangentenpaare λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), den Doppeltangenten der Curve R en sprechen d. h. den vier Quadraten quadratischer Formen, d sich in der Gruppe (2) vorfinden.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Kegelschni φ aus, so befindet sich in einem beliebigen Kegelschnittnet evidentermassen (wegen der Linearität der Bedingungsgle chungen in den Coefficienten) immer ein Büschel von solche die φ stützen; wählt man das Netz so, dass seine Individue alle durch drei beliebig gewählte Punkte gehen, so bestim das in ihm befindliche φ stützende Büschel eindeutig eine vierten Grundpunkt. Denkt man sich diesen construirt, kommt man durch dieselbe Construktion offenbar von je d dieser vier Punkte immer zum vierten.

Da aber sowohl zwischen irgend vier quadratisch (binären), als zwischen irgend vier der Gruppe (2) an

hörigen biquadratischen Formen eine lineare Identität besteht, so gilt der Satz *):

γ) „Durch irgend drei quadratische (binäre) Formen ist im Allgemeinen stets eine vierte eindeutig bestimmt, sodass sowohl zwischen diesen

*) [Es finden sich die Resultate der Sätze γ) δ) ε) und einiger weiteren auch im Wesentlichen, wenn auch ganz anders abgeleitet, in der während des Druckes erschienenen Abhandlung des Herrn Brill: „Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades" Math. Ann. XX. Vgl. auch die noch spätere Note desselben: „Ueber das Polvierseit" ebenda.

Die Zahl der Involutionen vierter Ordnung mit denselben sechs Doppelelementen, sowie algebraische Relationen zwischen den ersteren gab Herr Stephanos in einem Comptes Rendus Dec. 1881 erschienenen Auszuge aus einer grösseren der Pariser Academie eingereichten Abhandlung.

Herr Jordan gab einen Bericht über die letztere Comptes Rendus Mai 1882. Erst in diesem wird des wichtigen von H. Stephanos bewiesenen Prinzips Erwähnung gethan, dass zwei conjugirte Gruppen binärer Formen dieselben Combinanten besitzen.

Dasselbe Prinzip hat auch, ganz unabhängig von H. Stephanos, H. Brill seiner oben angegebenen Abhandlung zu Grunde gelegt.

Andrerseits findet sich dasselbe am Ende von Kap. I von mir bewiesen und ich kann hier nur anführen, dass dieses Kapitel schon am Ende des Jahres 1881 geschrieben war, wodurch natürlich ein Prioritätsanspruch nicht begründet sein soll.

Was die Involutionensätze ε) angeht, muss ich jedoch betonen, dass sowohl H. Brill, als H. Stephanos nur von Involutionen mit denselben Doppelelementen handeln, während dort die Erweiterung auf Involutionen mit denselben (6) Elementenpaaren entwickelt ist, eine Erweiterung, wie sie namentlich in der späteren Anwendung auf cubische Raumcurven von Wichtigkeit wird.

Was ich über die Zahl und Natur der weiteren zehn Elementenpaare entwickelt habe, liegt implicite in der von H. Brill l. c. pg. 354 etc. angegebenen Tabelle; aber man wird meinen Formulirungen einen gewissen Fortschritt gegenüber den Brill'schen Resultaten nicht absprechen.

Vgl. meine Note, Math. Ann. XXI, die einen kurzen Auszug meiner auf die Involutionen bezüglichen Resultate darstellt.

Mitte Januar 1882.]

vier Formen, als zwischen ihren Quadraten je eine lineare Identität besteht.

Bezogen auf irgend einen Normkegelschnitt φ, stellen die drei gegebenen Formen irgend drei Punkte in der Ebene desselben dar. Dann stellt die vierte Form einen vierten Punkt dar, der mit den drei ersten ein φ stützendes Kegelschnittbüschel bestimmt.

Die Involution, die das letztere auf φ ausschneidet, stellt die Schnittpunktformen einer Curve R dar, deren Doppeltangenten die Wurzeln der vier quadratischen Formen zu Argumentenpaaren haben etc. etc.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Kegelschnittbüschel aus, so hat der zugehörige Kegelschnitt φ nur den beiden Bedingungen zu genügen, auf dem gegebenen Büschel zu ruhen.

Der Inhalt dieses Satzes ist aber eines weit einfacheren Ausdrucks fähig. Denn dem φ stützenden Kegelschnittbüschel gehören drei Linienpaare an, $A_i\, B_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ein solches trifft aber φ (cf. pg. 106) in zwei zu einander harmonischen Punktepaaren oder die Geraden A_i, B_i sind in Bezug auf φ conjugirt.

Daraus folgt sofort:

γ_1) „Die vier quadratischen Formen des Satzes (γ) stellen, auf irgend einen Kegelschnitt φ bezogen, stets ein *Polviereck* desselben dar, und umgekehrt."

Die Umkehrung gilt, weil (cf. l. c.) ein in Bezug auf φ conjugirtes Linienpaar stets einen φ stützenden Kegelschnitt darstellt: zwei solcher Linienpaare (die nach dem Hesse'schen Satze cf. pg. 87 zugleich ein drittes solches, mit den ersten die

Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bildendes, liefern) bestimmen aber ein φ stützendes Kegelschnittbüschel.

153. Die Verbindungsgerade zweier Punkte, denen die quadratischen Formen ψ, χ zugehören mögen, trifft den Normkegelschnitt in dem zu ψ, χ harmonischen Paar d. i. der Funktionaldeterminante beider.

Demnach treffen die sechs Seiten des Polvierecks von φ diesen Kegelschnitt in den sechs Funktionaldeterminanten, die aus den vier quadratischen Formen zu bilden sind.

Andrerseits kommt diesen sechs weiteren Formen auch für die Curve R eine einfache Bedeutung zu. Sie stellen die Tangentenpaare dar, die von den Ecken des Doppeltangentenvierseits der Curve noch ausserdem an sie gehen.

Denn die sechs Tangenten, die von irgend einem Punkte in der Ebene der Curve R an sie gehen, berühren sie in den Doppelelementen der biquadratischen Involution, die das Strahlbüschel des Punktes aus R ausschneidet.

Gehen von dem Punkte zwei Doppeltangenten der Curve aus (mit den Argumentenpaaren ψ, χ), so ist die Involution gegeben durch

$$(8)\quad \psi^2 + k\chi^2 = 0$$

und demnach ihre Doppelelemente durch *):

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^2}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\psi^2}{\partial\mu} \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\chi^2}{\partial\mu} \end{vmatrix} = \psi\lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \\ \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\chi}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

q. e. d.

154. Die sechs Funktionaldeterminanten stehen weiter zu den vier ursprünglichen Formen in einer einfachen Bezieh-

*) λ, μ sind, wie immer, die homogenen Variabeln der binären Formen.

ung, zu der man durch passende Anwendung von quadratischen Transformationen auf die Curve R gelangt.

Zuvor beweisen wir den Satz:

δ) „Die Funktionaldeterminante der Involution (4) stellt die Wendepunkte der Curve dar."

In der That, man setze in den Gleichungen (6) drei der Argumente λ gleich und eliminire das vierte.

Wir gehen jetzt für den nächsten Zweck lieber von der zu R dualistischen Curve aus, einer rationalen ebenen Curve sechster Ordnung S mit sechs Spitzen und vier Doppelpunkten; die letzteren seien bezeichnet mit D_1, D_2, D_3, D_4.

Dann geht bekanntlich durch eine quadratische ein- eindeutige involutorische Transformation T_4 mit den Fundamentalpunkten $D_1\ D_2\ D_3$ die Curve S in eine von gleicher Ordnung und Art „S_1" über. Dabei bleiben die Argumente der sechs Spitzen und des vierten Doppelpunktes unverändert: dagegen treten nach voriger Nummer an Stelle der Argumentenpaare der drei Doppelpunkte $D_1\ D_2\ D_3$ ihre bezüglichen Funktionaldeterminanten. Daraus folgt bei wiederholter Anwendung des Satzes γ):

δ) „Bestimmen drei quadratische Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eine vierte φ_4 so, dass zwischen ihren vier Quadraten eine lineare Identität herrscht, so findet eine solche auch statt zwischen den Quadraten von φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) und denen der Funktionaldeterminanten der jedesmal restirenden drei Formen."

155. Excurs. An diese auf die Curve R in obiger Weise ausgeübten Transformationen T_i knüpft sich eine für die biqua-

*) Eine solche werde auch weiterhin immer durch das spezifische Zeichen T charakterisirt.

dratische Involution höchst wichtige Entwicklung. Eigentlich zwar gehört sie in die Theorie der allgemeinen ebenen rationalen Curven sechster Ordnung R_6^2, soweit sie mit der biquadratischen Involution verbunden ist. Da indess die gemeinte Entwicklung von der speziellen Natur der Curve S fast unabhängig ist, so möge sie gleich hier im Wesentlichen vorweggenommen werden.

Die Verbindungsgerade der Doppelpunkte $D_i\, D_k$ (φ_i, φ_k) der Curve S schneidet nach Nr. 153 aus S das Punktepaar aus, das durch die Funktionaldeterminante von φ_i, φ_k (bezeichnet mit φ_{ik}) gegeben ist.

Für eine allgemeine R_6^2 sind bekanntlich statt der sechs Spitzen sechs weitere Doppelpunkte Δ_r vorhanden ($r = 1, 2, \ldots 6$) und die Punktepaare φ_{ik} hören dann auf, gerade die Funktionaldeterminanten von φ_i, φ_k zu sein, sondern sind irgend welche anderen sechs quadratischen Formen.

Im Uebrigen denken wir uns auf der Curve R_6^2 gerade so einen Parameter ausgebreitet, wie auf S resp. R_4^2. Den Doppelpunkten Δ_r mögen die Argumentenpaare Φ_r zugehören. Dann zeigt die Figur der Curve R_6^2 unmittelbar:

ε) „Die vier Strahlbüschel der Doppelpunkte D_i schneiden nebst dem einen durch sie bestimmten Kegelschnittbüschel D aus der Curve fünf biquadratische Involutionen mit denselben sechs Elementenpaaren Φ_r aus.“

Diese fünf Involutionen fassen wir näher in's Auge: erst später soll gezeigt werden, dass es keine weiteren mit derselben Eigenschaft giebt, sowie dass die sechs Elementenpaare Φ_r ganz beliebig angenommen werden dürfen.

Durch eine der vier Transformationen T_i reproduciren sich die fünf Involutionen und zwar bleiben die durch die drei

Strahlbüschel D_k, D_l, D_m erzeugten unverändert, während die vom Strahlbüschel D_i und vom Kegelschnittbüschel D bestimmten sich vertauschen.

ε_1) „Unterwirft man die Curve R_6^2 den vier*) quadratischen Transformationen T_i (deren Fundamentaldreiecke von je drei der vier Doppelpunkte D_i gebildet sind), so erhält man vier neu Curven R_6^2 derselben Art, für die immer sech ihrer (zehn) Doppelpunkte dieselben Argumentenpaare besitzen wie die sechs ursprünglic ausgewählten (Δ_r).

Die so erhaltenen fünf Curven bilden eine Cyclus in der Weise, dass durch den angegebenen Transformationsprocess aus jeder die vier übrigen hervorgehen.

Die Argumentenpaare der fünfmal vi ei weiteren Doppelpunkte bilden zusammen d ie zehn weiteren (je zweien noch ausserdem ge-meinsamen) Elementenpaare der fünf Invo-lutionen.

Die fünf Involutionen sind auch durch d ie fünf Involutionen dargestellt, die die fünf Kegelschnittbüschel D aus den fünf Curven R_6^2 ausschneiden."

Daher genügt es, wenn die je zwei resp. drei der fünf

*) Eine solche Transformation ist natürlich durch ihr Fundamental-dreieck noch nicht bestimmt, sondern enthält noch zwei willkürliche Parameter, wie bekannt. Man kann diese etwa so bestimmen, dass der vierte Doppelpunkt sich in der Transformation selbst entspricht, dann ist für sämmtliche fünf Curven R_6^2 die Lage der vier Doppelpunkte D_i dieselbe.

Involutionen gemeinsamen Elementenpaare bestimmt werden sollen, für eine der fünf Curven R_6^2, etwa die gegebene, irgend zwei resp. drei der Strahlbüschel D_i daraufhin zu untersuchen.

Nun haben offenbar die beiden Involutionen D_i, D_k noch ausserdem die drei Elementenpaare φ_l, φ_m, φ_{ik} gemein: sowie die drei Involutionen D_i, D_k, D_l das eine Paar φ_m. Dies liefert mithin sofort die erste Ergänzung des letzten Satzes:

ε_2) „Je zwei der fünf Involutionen haben noch (ausser den sechs gemeinschaftlichen Elementenpaaren Φ_r) drei Elementenpaare gemein, je drei noch *eines*.

Daher reduciren sich die 3. 10 weiteren solchen Elementenpaare auf 10, deren jedes dreimal auftritt, d. h. diese zehn weiteren Paare gehören den fünf Involutionen in der Art an, wie die zehn Eckpuncte eines Pentaeders den fünf Ebenen desselben.“

Endlich enthält jede der fünf Involutionen sechs der zehn weiteren Paare: z. B. D_i die Paare φ_k, φ_{ik}; φ_l, φ_{il}; φ_m, φ_{im}. Diese bilden drei Quadrupel der Involution und wir haben:

ε_3) „Die zehn weiteren (theilweise gemeinsamen) Elementenpaare der fünf Involutionen lassen sich auch in fünf Sextupel anordnen, so dass jedes Paar dreimal auftritt. Jedes der Sextupel bildet drei Quadrupel einer der Involutionen.

Diese Sextupel entsprechen also den Gegenecken des vollständigen Vierseits, das auf irgend einer Ebene des Bild-Pentaeders von den vier übrigen ausgeschnitten wird.“

Dieser Excurs möge vorläufig genügen.

Ueberträgt man diese Entwicklungen unter Vorwegn
des Hülfssatzes, dass es ausser den besprochenen fünf
lutionen keine weiteren (mit denselben sechs Elementenpa
giebt, auf die Curve *R*, so erkennt man, dass damit die
gabe, die Zahl der biquadratischen Involutionen mit
selben Doppelelementen*) nebst dem Zusammen
unter ihnen zu erforschen, im Wesentlichen erledigt ist.

Eine partielle Ausdehnung der Zahlverhältnisse au
volutionen beliebiger Ordnung mit denselben Elementenp
findet man Kap. III.

Ehe wir uns aber zur Figur des Polvierecks (Sa
zurückwenden, möge noch ein Zweifel beseitigt werden
man erheben kann, ob man nemlich berechtigt ist, die F
onaldeterminante zweier biquadratischer Formen als eine
allgemeine Form sechsten Grades aufzufassen. Allei
hängt die Involution vierten Grades von ebenso viel
stanten (nemlich sechs) ab, wie die Gleichung ihrer Do
elemente: es könnten aber eventuell zwischen den Co
enten der letzteren Gleichung Relationen stattfinden, d
zu einer speziellen Gleichung sechsten Grades ste
würden.

Die Funktionaldeterminante einer Involution (4)
entwickelt:

$$(10)\ 0 = J = \mu^6 p_{01} + 3\mu^5\lambda p_{02} + 3\lambda^2\mu^4 (3 p_{03} +$$
$$+\lambda^3\mu^3(p_{01}+8p_{23}) + \lambda^6 p_{34} + 3\lambda^5\mu p_{24} + 3\lambda^2\mu^4(p_{14}+2p_{2}$$

wo die p_{ik} die bekannten Verbindungen $(ab)_{ik}$ bedeuten.

Zwischen diesen herrschen bekanntlich drei Relat
der Form:

$$(11)\ p_{ik}\, p_{lm} + p_{il}\, p_{mk} + p_{im}\, p_{kl} = 0$$

wo *i*, *k*, *l*, *m* irgend vier der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 sind.

*) Für diese ist der erwähnte Hülfssatz durch Hinweis au
Stephanos'sche Resultat cf. pg. 241 anm. ersetzbar.

Aus den fünf möglichen Relationen dieser Art kann man irgend drei auswählen, dann setzen sich die beiden übrigen, wie man sich leicht überzeugt, linear aus jenen zusammen.

Alle sonst denkbaren Relationen zwischen den p müssen, da z. B. zwischen den 6 p der Relation (11) nur diese eine Bedingung statthat, auf diese drei ausgewählten zurückführbar sein. Wir wählen etwa die, in denen der Reihe nach der Index 4, 3, 2 nicht auftritt.

Dann kann man z. B. die folgenden p:

$$p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{24}, p_{34}$$

als unabhängige homogene Grössen auffassen. Denn es giebt keinen Index, der in einem der p nur einmal aufträte, so dass zwischen irgend sechs dieser Grössen eine der Relationen (11) nicht existiren kann.

Aus den ersten der drei ausgewählten Relationen kann dann p_{12}, und aus den beiden folgenden p_{04}, p_{14} eindeutig durch die übrigen ausgedrückt werden.

Denkt man sich jetzt die Coefficienten a, b variabel, so enthält jeder Coefficient in (10) eine unabhängige Variable q. e. d.

156. Wir kehren nunmehr zu den vier Formen φ_i, die den Doppeltangenten von R zugehörten, zurück und fragen, welche (canonische) Gestalt die Form J (10) annimmt, sobald man die Faktoren einer der Formen φ_i als neue homogene Variable einführt. Seien diese $(\lambda-\varepsilon_i)$ $(\lambda-\eta_i)$; setzen wir demnach

$$(12)\quad \lambda' = \lambda-\varepsilon_i,\ \mu' = \lambda-\eta_i$$

so wird die Doppeltangente $(\varepsilon_i\ \eta_i)$ dadurch zur Doppeltangente $(0, \infty)$. Die Einsetzung in (7) liefert dann:

(13) $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ und damit $p_{2r} = 0$ $(r = 0, 1, 3, 4)$.

Damit geht J (10) über (wenn wir wieder λ, μ schreiben) in: (14)

$J = \mu^6 p_{01} + 3\mu^4\lambda^2 p_{03} + \mu^3\lambda^3 (p_{04} + 8p_{13}) + 3\mu^2\lambda^4 p_{14} + \lambda^6 p_{34} = —$

wo man noch etwa p_{13} durch die übrigen in (14) vorkommenden p ausdrücken kann. Dies liefert den Stephanos'schen Satz (cf. Comptes Rendus Dec. 1881):

ζ) „Die Frage nach der Zahl und Natur der biquadratischen Involutionen mit gegebenen festen Doppelelementen ($J = 0$) ist identisch mit der Frage nach der Zahl und Natur der verschiedenen linearen Substitutionen (12), durch die J in diejenige canonische Form übergeht, in der die Coefficienten des zweiten und vorletzten Termes verschwinden."

157. Wir combiniren jetzt die für die Doppeltangenten D_i der Curve R (d. h. ihre Argumentenpaare φ_i) erhaltenen Resultate mit der bekannten[52] Entstehung einer solchen Curve aus einem Kegelschnitt mittelst einer quadratischen Transformation T.

Sei ein Kegelschnitt φ gegeben nebst drei Punkten (seiner Ebene), die, bezogen auf ihn, durch die Argumentenpaare $\psi_k = (a_k, b_k)$ ($k = 1, 2, 3$) bezeichnet seien. Das Dreieck der Punkte sei Fundamentaldreieck einer (sonst vorläufig beliebigen) Transformation T.

Dann ist das Bild von φ eine Curve R, mit den Doppelpunkten in den Ecken des Dreiecks. Von ihnen gehen an die Curve R die Tangentenpaare $\psi_k = (a_k, b_k)$: die Argumentenpaare der Doppelpunkte selbst sind die bezüglichen Funktionaldeterminanten der ψ (ψ_{kl}).

Durch die Ecken des Dreiecks gehen vier φ doppelt berührende Kegelschnitte: die Paare der Berührungspunkte sind durch die Formen φ_i gegeben und die vier Kegelschnitte gehen vermöge T in die Doppeltangenten von R über. Dies möge vor der Hand genügen.

Man betrachte jetzt auf dem Kegelschnitt φ (als Klassencurve) diejenige projektivische Beziehung, der die drei Paare (a_i, b_i) als Paare angehören. Solcher projektivischer Beziehungen giebt es noch acht, da noch in jedem Paare das Element a_i dem ersten System und b_i dem zweiten oder umgekehrt angehören kann.

Diese acht Beziehungen theilen sich aber in zwei gleiche Gruppen von je vier, wo die zweite aus der ersten hervorgeht, indem man in jedem der drei Paare $a_i\ b_i$ die Rollen der Elemente vertauscht, wodurch sich nur die Bezeichnungen: „erstes und zweites System" vertauschen.

Die eine der beiden Gruppen ist dargestellt durch das Schema $(i, k, l = 1, 2, 3)$

$$(15)\quad \begin{Bmatrix} (a_i\ b_i) & (a_k\ b_k) & (a_l\ b_l) \\ (a_i\ b_i) & (a_k\ b_k) & (b_l\ a_l) \\ (a_i\ b_i) & (b_k\ a_k) & (a_l\ b_l) \\ (a_i\ b_i) & (b_k\ a_k) & (b_l\ a_l) \end{Bmatrix}$$

Bekanntlich durchlaufen die Punkte, von denen Tangentenpaare einer projektivischen Beziehung an einen Kegelschnitt φ gehen, einen zweiten Kegelschnitt, der den ersten doppelt berührt *).

---

*) Andrerseits stellt ein beliebig gewählter Kegelschnitt φ nebst einer projektivischen Beziehung (linearen Transformation) seiner Elemente auf ihm die allgemeine reciproke Verwandtschaft in der Ebene dar.

Denn wählen wir φ als Ordnungskegelschnitt, so ist durch die gegebene Beziehung ein zweiter (Klassen-) Kegelschnitt Φ bestimmt, der φ zweimal berührt und umgekehrt.

Zwei solche sich doppelt berührende Kegelschnitte sind bekanntlich[53]) stets die Fundamentalkegelschnitte einer reciproken Verwandtschaft u. umg. d. h. die Örter der Punkte resp. Geraden, deren in der Verwandtschaft entsprechende Gerade resp. Punkte mit ihnen incident sind.

Daher muss für jede der projektivischen Beziehungen (15) der zugehörige Kegelschnitt durch drei feste Punkte ...

Zugleich werden dann dadurch die Elemente von φ und Φ selbst projektivisch auf einander bezogen.

Es möge für den canonischen Fall, dass φ zum Normkegelschnit N_2 gewählt wird

(1) $4\,x_0\,x_2 - x_1^2 = 0$ i. e. $\rho x_0 = 1$, $\rho x_1 = 2\,\lambda$, $\rho x_2 = \lambda^2$ (cf. pg. 43)

und die gegebene projektivische Beziehung

$$(2)\ \lambda' = \alpha\,\lambda$$

ist (also die Doppelelemente 0, ∞ besitzt) die Rechnung durchgeführt werden.

Dann ist der Kegelschnitt Φ von der Form

$$(3)\ u_0\,u_2 - \beta u_1^2 = 0$$

und es handelt sich um die Beziehung zwischen α, β.

Die allgemeine bilineare Form, deren Verschwinden die allgemeine reciproke Verwandtschaft darstellt, wird für N_2 als Ordnungsfundamentalkegelschnitt, folgende einfachere:

(4) $x_0(k_{01}\,y_1 + k_{02}\,y_2) + x_1(-k_{01}\,y_0 - y_1 + k_{12}y_2) + x_2\{(4 - k_{02})\,y_0 - k_{12}y_1\} = 0.$

Soll andererseits der Klassenfundamentalkegelschnitt der Verwandtschaft mit (3) zusammenfallen, so verschwinden k_{01} und k_{12} und (4) wird:

(4') $x_0\,y_2\,k_{20} - x_1\,y_1 + x_2\,y_0\,(4 - k_{02}) = 0$ und die dualistisch adjungirte Form:

(5) $u_0 v_2 k_{02} - u_1 v_1 k_{02}(4 - k_{02}) + u_2 v_0 (4 - k_{02}) = 0.$

und

$$(6)\ \beta = \frac{k_{02}\,(4 - k_{02})}{4}$$

Irgend einem Punkte P_1 (λ_1) von N_2 entspricht eine durch ihn gehende Gerade. Ihr zweiter Schnittpunkt mit N_2 ist der nach (2) dem Punkte λ_1 entsprechende Punkt λ'_1. Die Gleichung der Geraden wird wegen (4')

$$(7)\ x_0\,k_{02}\,\lambda_1^2 - 2x_1\,\lambda_1 + x_2\,(4 - k_{02}) = 0$$

und ihr mit N_2 gemeinsames Punktepaar:

(8) $\nu^2\,(4 - k_{02}) - 4\,\nu\,\lambda_1 + k_{02}\,\lambda_1^2 = (\nu - \lambda_1)\,\{\nu\,(4 - k_{02}) - \lambda_1\,k_{02}\} = 0,$

mithin ist

$$(9)\ \alpha = \frac{4 - k_{02}}{k_{02}} \text{ und}$$

$$(10)\ \beta = \frac{4\,\alpha}{(\alpha + 1)^2}$$

gehen und φ doppelt berühren. Dies liefert mit Berücksichtigung des über die Transformation T Gesagten:

η) „Gegeben sei eine Curve R: von den drei Doppelpunkten mögen die Tangentenpaare $(a_i\, b_i) = \psi_i$ an sie gehen: die Argumentenpaare der Doppeltangenten seien $(\varepsilon_k\, \eta_k) = \varphi_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Dann sind die vier Paare φ_k die Doppelelemente der vier (überhaupt möglichen) projektivischen Beziehungen, denen die drei Paare ψ_i als Paare angehören.

Durch irgend einen Punkt P einer Doppeltangente D_k gehen immer zwei solche Kegelschnitte, dass ihre drei weiteren Schnittpunkte in den Doppelpunkten von R liegen, und die zugleich R berühren.

Die Berührungspunkte sind ein Paar der D_k angehörigen projektivischen Beziehung."

Und in Hinsicht auf Satz γ_2) kann man unser Resultat beiläufig als einen Satz aus der Theorie der projektivischen Beziehungen aussprechen:

η_1) Es giebt vier verschiedene projektivische Beziehungen, denen drei feste Paare $(a_i\, b_i) = \psi_i$

In der That fallen die beiden nach (10) einem Werth β entsprechenden Werthe für $\beta = 1$ zusammen. Dann aber wird auch $\alpha = 1$ und es fallen N_2 und Φ zusammen (d. h. Φ wird $= N_2$) und die projektivische Beziehung auf N_2 zur Identität. Das ist aber bekanntlich der Fall des Polarsystems.

Betrachtet man in der allgemeinen Verwandtschaft einen beliebigen Punkt P_1 als Punkt des ersten Systems, und gehen von ihm die Tangenten $(d_1\, t_1)$ an N_2, so entsprechen diesen in der projektivischen Beziehung zwischen den Elementen von N_2 und Φ auf Φ zwei Punkte $(d_2\, t_2)$: die Gerade $(d_2\, t_2)$ ist dann die P_1 entsprechende Gerade.

als Elementenpaare angehören. Ihre Doppelelemente seien durch die Paare $(\varepsilon_k \eta_k) = \varphi_k$ dargestellt.

Zwischen den Quadraten dieser Formen φ_k herrscht eine lineare Identität. Construirt man sechs weitere Paare, die Funktionaldeterminanten der φ_k, so stellt jedes Paar φ_k mit den drei dieser weiteren Paare, die den Index k nicht enthalten, wiederum die Doppelelemente von vier projektivischen Beziehungen dar, die drei gemeinsame Paare besitzen. Oder kürzer: zu vier projektivischen Beziehungen mit drei gemeinsamen Paaren gehören noch vier Gruppen von vier Beziehungen derselben Art. Jedes Doppelelementenpaar tritt zweimal auf, so dass es deren im Ganzen zehn giebt.

Die fünf Doppelelementenpaarquadrupel entsprechen den Ecken der fünf Tetraeder des Bild-Pentaeders der Involutionen vierter Ordnung mit gemeinsamen Doppelelementen etc. etc.

Zu den drei (einfach unendlichen) Schaar von projektivischen Beziehungen mit drei fest Doppelelementenpaaren φ_1, φ_2, φ_3 gehört stets no eine vierte mit dem Doppelelementenpaar φ_4.

Dann giebt es drei bestimmte Paare $(a_i\ b_i) =$ so dass jede der vier Beziehungsschaaren ein Beziehung aufweist, der diese drei Paare a Elementenpaare zugehören etc. etc.“

158. Im Folgenden soll die Transformation T in direkt Verbindung mit dem Schnittpunkttheorem einer Curve R (gebracht werden. Diese Verbindung ist schon implicite i Satze (β) enthalten.

Denn es ist bekannt, dass die in Bezug auf ein Keg

schnittbüschel conjugirten Punktepaare nichts anderes sind, als die Punktepaare einer Transformation T, deren Einheitspunkte in den Basispunkten *) des Büschels liegen und deren Fundamentaldreieck das gemeinsame Polardreieck des Büschels ist; und umgekehrt lässt sich jede ein- eindeutige, involutorische, quadratische Transformation in dieser Weise auffassen. Wir nennen sie kurz die Transformation des Büschels. Dann kann man Satz (β) auch so aussprechen:

β_1) „Es sei irgend ein Kegelschnittbüschel gegeben und damit seine Transformation T. Sei dann φ irgend ein auf dem Büschel ruhender Kegelschnitt, so sind die sämmtlichen Punktepaare von T ersetzbar durch die sämmtlichen Gegenecken aller (∞^2) φ umschriebenen Polvierseite des Büschels."

Wird φ zum Normkegelschnitt gewählt, so ist umgekehrt ein solches Büschel durch

$$(3)\ a_\sigma^2 = 0,\ b_\sigma^2 = 0$$

und die Transformation T durch

$$(6)\ a_s = 0,\ b_s = 0$$

dargestellt.

In der That werden ja die Formen (6), wenn man die s_i durch die beiden Reihen $\sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2;\ \tau_0\ \tau_1\ \tau_2$ ersetzt, zwei in diesen Reihen bilineare symmetrische Formen, die durch ihr Verschwinden immer eine Transformation T[54] feststellen.

Wir denken uns die Ebene des Büschels (oder auch von φ) zunächst als eine ganz beliebige, mit der der Curve R nicht sich deckende.

159. Wählt man das Polardreieck des Büschels zum

*) Wir nennen daher umgekehrt das Büschel das „Einheitsbüschel von T", seine zerfallenden Kegelschnitte, wie gewöhnlich, die „Einheitsgeradenpaare von T".

Coordinatendreiecks, so ist die Transformation T immer in der canonischen Form darstellbar

(9) [illegible]

wo die [illegible] nicht beliebige Constanten sind.

Dann ist die Gleichung für das Paar der durch den Punkt $x_i = x_k = 0$ gehenden Einheitsgeraden von T

(10) $x_i^2 \nu_k - x_k^2 \nu_i = 0$.

Da der Kegelschnitt φ

(11) [illegible] $= 0$

auf dem Einheitsvierseit von T ruhen soll, so gelten die Relationen:

(12) [illegible] oder $\frac{\alpha_i}{\alpha_{ik}} = \frac{\nu_i}{\nu_k}$;

zu „Die ganze Schaar der nach Satz β_1) [illegible] u einer in der canonischen Form gegebenen Transformation T (9) gehörigen Kegelschnitte φ ist dargestellt durch

(18) φ $u_0^2\nu_0 + u_1^2\nu_1 + u_2^2\nu_2) + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{01}u_0u_1 + 2\alpha_{02}u_0u_2$ [illegible] $= 0$,

wo die α variabel sind."

Mithin ist die Gleichung des vom Fundamentalpunkte ($x_i = 0$, $x_k = 0$) an einen Kegelschnitt φ (18) gehenden Tangentenpaares:

(20) $x_i^2 \nu_k - 2\, x_i\, x_k\, \alpha_{ik} + x_k^2 \nu_i = 0$.

Wegen der Bedingung (12) ist dieses Paar zum Einheitsgeradenpaar (10) harmonisch.

Wir nennen diejenige Strahleninvolution (zweiten Grades) des Fundamentalpunktes, für die seine Einheitsgeraden Doppelstrahlen sind, „die Hauptinvolution des Punktes", sowie einen Kegelschnitt φ einen „Grundkegelschnitt von T" und haben*):

*) Andrerseits sagt Satz γ_1) jetzt aus, dass jeder Kegelschnitt, für den die Einheitspunkte von T ein Polviereck bilden, ein Grundkegelschnitt von T ist und umg.

λ) „Die zwei Bedingungen, denen ein Grundkegelschnitt φ einer Transformation T zu genügen hat (nemlich auf dem Einheitsbüschel von T zu ruhen) lassen sich auch dahin angeben, dass die von den Fundamentalpunkten von T an φ gehenden Tangentenpaare den bez. Hauptinvolutionen angehören."

Ist dies daher für zwei Paare der Fall, so auch für das dritte, wie bekannt. Umgekehrt folgt aus Obigem sofort, dass bei beliebigem Grundkegelschnitt φ (11) und bei beliebigem Fundamental- (und Coordinatendreieck) die bezügliche Transformation T die folgende ist:

$$(21)\quad \rho x_i\, y_i = \alpha_{ii}.$$

160. Die Construktion des einem gegebenen Punkte vermöge einer Transformation T entsprechenden Punktes ist bekannt, dagegen möge hier mit Benützung der Sätze Nr. 49 cf. auch Nr. 125, 127, 136 eine andere Eigenschaft eines Punktepaares von T zur Sprache kommen.

Die Elemente eines solchen Paares bestimmen immer ein einem Grundkegelschnitt φ umschriebenes Polvierseit des Einheitsbüschels (für das sie zwei Gegenecken sind). Daraus folgt:

μ) „Greift man irgend einen der Grundkegelschnitte φ einer Transformation T heraus, so bestimmen zwei vermöge T sich entsprechende Punkte (vermöge ihrer Tangenten an φ) ein φ umschriebenes Vierseit.

Dann ruht der diesem Vierseit einbeschriebene und auf φ ruhende Kegelschnitt *zugleich* auf dem ganzen Einheitsbüschel von T. Oder:

Denkt man sich nur den einen Punkt gegeben (mit den Tangenten t_1, t_2 an φ), so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt, der t_1, t_2 berührt und

auf φ und dem Einheitsbüschel von T ruht. Die zwei weiteren Tangenten, die dieser mit φ gemein hat, treffen sich in dem dem gegebenen vermöge T entsprechenden Punkte. etc."

161. Nunmehr gehen wir zur Ausführung des Nr. 158 angeregten Gedankens. Vermöge der Gleichungen (7) (8) repräsentirt jedes Punktepaar von T, bezogen auf einen Grundkegelschnitt φ, oder auch jedes φ umschriebene Polvierseit des Einheitsbüschels von T ein Punktquadrupel einer Curve *R* (mit dem Schnittpunkttheorem (8)) auf gerader Linie.

Jeder Fundamentalpunkt von T bildet mit einem beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Fundamentallinie ein Paar von T, mithin sind, wenn von den Fundamentalpunkten die Tangentenpaare $(\alpha_i\, \beta_i)$ an φ gehen, dies die Argumentenpaare der drei Doppelpunkte *) von P.

Umgekehrt ist bekanntlich bei beliebiger Annahme dieser drei Paare eine Curve *R* (nebst allen collinear in sie überführbaren) völlig bestimmt, wie es im Einklang mit der Schlussbemerkung von Nr. 159 sein muss.

Dagegen treffen jetzt die Seiten des Fundamentaldreiecks

*) Dies erhält seine Bestätigung durch die an Nr. 55, 115 anknüpfende Ergänzung. Die Einheitsgeradenpaare schneiden aus dem Kegelschnitt φ harmonische Quadrupel aus, mithin sind die letzteren durch die Gleichung dritten Grades in *k* (cf. Formel (7)):

$$j\,(a_\lambda + k\, b_\lambda = (0$$

bestimmt. Sei k_1 eine der Wurzeln, so ist nach Früherem

$$j\,(a_\lambda + k_1\, b_\lambda) \equiv A\,(\lambda - \alpha)^4 + B\,(\lambda - \beta)^4$$

wo α, β das zu den beiden Paaren, die die Geraden des bezüglichen Einheitspaares aus φ ausschneiden, harmonische Paar ist d. h. das von ihrem Doppelpunkt (Fundamentalpunkt von T) an φ gehende Tangentenpaar.

Dann aber lautet die bezügliche Gleichung des Schnittpunkttheorems der Curve P (cf. Formel 6)):

$$A\,(\lambda_1-\alpha)\,(\lambda_2-\alpha)\,(\lambda_3-\alpha)\,(\lambda_4-\alpha) + B\,(\lambda_1-\beta)\,(\lambda_2-\beta)\,(\lambda_3-\beta)\,(\lambda_4-\beta) = 0$$

woraus wiederum hervorgeht, dass α, β ein Doppelpunkt der Curve P ist.

den Kegelschnitt φ in den drei Paaren $(a_i\ b_i)$, die auf der Curve R den Berührungspunkten der von den Doppelpunkten an sie gehenden Tangenten zugehören.

Die vier Einheitspunkte von T repräsentiren, auf φ bezogen, die Argumentenpaare der Doppeltangenten von R und die sechs Punkte J auf φ, in denen ein Einheitskegelschnitt φ berührt, die Wendepunkte von R.

162. Wir haben bisher mit zwei ganz verschiedenen Transformationen T zu thun gehabt, einmal die, durch die eine Curve R in einen Kegelschnitt überging (und die noch zwei Parameter enthielt): zweitens diejenige, die das Schnittpunkttheorem einer Curve P auf eine beliebige Ebene abbildete mit Hülfe eines beliebigen Kegelschnitts φ und eines beliebigen Fundamentaldreiecks (wodurch sie dann aber eindeutig bestimmt war).

Wir lassen nunmehr die beiden Ebenen von T *zusammenfallen* (und denken uns in dieser Ebene die Curven R und P), ferner aber auch beide Transformationen T und zugleich beide Kegelschnitte.

In der That sind die beiden Parameter der ersten Transformation so bestimmbar. Bekanntlich sind die drei Tangentenpaare von den Doppelpunkten einer Curve R an dieselbe zugleich solche eines bestimmten Kegelschnitts K.

Von einem Doppelpunkte A_i geht somit einmal ein solches Tangentenpaar $(a_i\ b_i)$ aus: zweitens das Geradenpaar nach den beiden andern Doppelpunkten $A_k\ A_l$.

ν) „Wir wählen für jeden Doppelpunkt dasjenige Geradenpaar zum Einheitsgeradenpaar (der Transformation T, durch die R in einen Kegelschnitt K übergeht), das zu den beiden angegebenen Paaren harmonisch ist. Dann geht die Curve R gerade in den Kegelschnitt K über."

In der That ist diese Bestimmung möglich, und zwar auf

nur eine Art. Denn zum Geradenpaar $A_i\, A_k$, $A_i\, A_l$ muss das Einheitsgeradenpaar a priori harmonisch sein: die drei Restbedingungen kommen aber wegen Satz (λ) auf nur zwei zurück.

Dieser Kegelschnitt K ist daher sowohl das Bild der Curve R vermöge der so bestimmten „Grundtransformation T", als zugleich für diese ein Grundkegelschnitt.

Er heisse daher auch der „Grundkegelschnitt φ der Curve R^{a}.

Soll nun diese Transformation T zugleich das Schnittpunkttheorem der Curve R darstellen, so folgt:

π) „Die Curven R und P sind durch T ein-eindeutig*) auf einander bezogen und zwar haben sich für beide die drei Paare ($\alpha_i\ \beta_i$) und die drei andern ($a_i\ b_i$) vertauscht."

163. Die Beziehung zwischen den beiden Curven R, P soll jetzt mit Hülfe des Kegelschnitts φ näher angegeben werden. Es ergeben sich so eine Reihe von Sätzen **) für den Grundkegelschnitt einer rationalen Curve vierter Ordnung.

Dieser Grundkegelschnitt dient jetzt zugleich als Normkegelschnitt, sodass die Bezeichnungen „Punkt ($\lambda_1\ \lambda_2$), Gerade ($l_1\ l_2$)" völlig deutlich sind.

Nun entspricht irgend einer Tangente von P ($\lambda\,\lambda\, r_1\ r_2$)

---

*) Da dann zwischen den Parametern beider rationalen Curven eine bilineare Beziehung (Projectivität) herrscht, so hat man beiläufig den Satz:

„Es giebt eine bestimmte projektivische Beziehung, die irgend drei Elementenpaare in ihre bezüglichen Funktionaldeterminanten überführt."

Die Art und Weise, wie sich die einzelnen Faktoren dieser drei Formenpaare entsprechen, folgt daraus, dass einem Umlauf der Curve R ein bestimmter Umlauf der Curve P entspricht.

**) Bei ihrer Ableitung könnte man sich auch auf die Betrachtung der Transformation T allein beschränken, da diese ja die der Curve P ersetzt.

n vollständiges (φ umschriebenes) Vierseit von T, für das ein ıar Gegenecken aus den Punkten ($\lambda\lambda$) ($r_1 r_2$) besteht. Die n Punkten von φ vermöge T entsprechenden Punkte durchıfen die Curve R: d. h.: die Beziehung zwischen R und P emäss Satz (π)} gestaltet sich genauer so:

π_1) „Die Punkte der Curve R (auf φ bezogen) präsentiren die Restpunktepaare der Tanenten der Curve P und umgekehrt (und reciprok, enn man die Punkte von P auf ihren Grundegelschnitt beziehen würde).“

Dies wende man auf die Doppeltangenten von P an. ann entsprechen diesen einmal vier Punktepaare auf R, ndererseits vier Punktepaare auf φ (und zwar gehen vermöge T ie Elemente jedes Paares in einander über). Demnach setzen ese vier Paare die Schnittpunkte von R und φ zusammen:

π_2) „Die acht Schnittpunkte einer beliebigen ırve R mit ihrem Grundkegelschnitte theilen h in vier Paare φ_i der Art, dass die vier Punkte (auf φ bezogen) die Einheitspunkte der zur rve R gehörigen Grundtransformation T sind.“

Die Eigenschaften der Einheitspunkte von T liefern eine ihe von specielleren Sätzen für R, die hier unterdrückt rden können.

Wir gehen weiter zu den Wendetangenten von P.

Nun ist es bekannt, dass eine beliebige Gerade von zwei gelschnitten des Einheitsbüschels berührt wird und dass Berührungspunkte stets ein Paar der Transformation T len.

Da aber den Wendepunktsargumenten ω auf P die Doppelmente der auf φ durch das Einheitsbüschel ausgeschnittenen olution entsprechen, so gilt:

π_3) „Gegeben sei irgend eine Curve R. Dann ebt es sechs Kegelschnitte des Einheitsbü-

schels ihrer Grundtransformation T, die ihren Grundkegelschnitt φ (in den Punkten ω) berühren.

Die Tangenten von φ in den Punkten ω werden von sechs weiteren Kegelschnitten des Einheitsbüschels noch an einer andern Stelle berührt (in den Punkten W).

Diese Punkte W liegen wieder auf der Curve R.“

Die sechs weiteren, von den Punkten W an φ gehenden Tangenten besitzen die Argumente r der Restpunkte der Wendetangenten von P.

π_4) Diese Tangenten r von φ berühren aber die Curve R in den Punkten W, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es giebt zwölf den Curven R und φ gemeinsame Tangenten. Zu diesen kommt man so.

Eine beliebige Tangente τ von φ treffe R in den Punkten $(\tau\mu_1)$ $(\tau\mu_2)$ $(\tau\mu_3)$ $(\tau\mu_4)$, dann sind andrerseits die μ die Restpunkte der vier Tangenten, die vom Punkte τ der Curve P an sie gehen.

Nun fallen von den vier μ d. h. von solchen vier Tangenten nur in folgenden zwei Fällen zwei zusammen; wenn der Punkt τ von P:

Erstens ein Doppelpunkt (a_i resp. b_i),

Zweitens ein Restpunkt r einer Wendetangente ω ist.

Im letzteren Falle fällt auch der Restpunkt μ einer solchen Tangente mit dem Wendepunkt ω zusammen.

Mithin sind die gemeinsamen Tangenten von R und (einmal die drei Tangentenpaare a_i, b_i, die von den Doppelpunkten ausgehen und diese dienten ja gerade ursprünglich zur Bestimmung von φ: andrerseits) die sechs Tangenten, die R in den Punkten (r, ω) berühren. Dies ist aber Satz (π_4).

164. Es erhebt sich jetzt die allgemeine Frage:

Welche Eigenschaft haben drei Punkte auf R resp. P, die drei andern auf P resp. R in gerader Linie liegenden entsprechen?

Erst nach Beantwortung dieser kann man die Frage nach der Beziehung beider Curven als im Wesentlichen erledigt ansehen.

Der erste Fall ist der einfachere.

Man nehme drei Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf der Curve P in gerader Linie an. Ihre Tangenten an P schneiden drei Restpunktepaare aus; die diesen (nach Satz π_1) entsprechenden Punkte der Curve R werden gesucht (deren Bildpunkte auf φ eben die Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ besitzen).

Dann müssen die Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von φ Seiten eines φ umschriebenen Polvierseits des Einheitsbüschels (von T) sein (cf. Satz β).

Dies liefert mit Hülfe des Satzes (μ) den folgenden:

ρ) „Drei Punkten von P auf gerader Linie entsprechen zunächst auf φ drei Punkte, deren Tangenten (an φ) ein solches Dreiseit bilden, dass ihm ein Kegelschnitt einbeschrieben werden kann, der auf φ und dem Einheitsbüschel ruht (und umgekehrt).

Die diesen drei Punkten von φ vermöge T entsprechenden Bildpunkte auf R sind die gesuchten, den bez. Punkten von P entsprechenden."

165. Zweitens betrachte man drei Punkte μ_1, μ_2, μ_3 von R auf gerader Linie. Trifft diese φ in dem Punktepaar η_1, η_2, so gehören die drei von den gegebenen Punkten an φ gehenden Tangentenpaare der Involution (zweiten Grades) mit den Doppelelementen η_1, η_2 an.

ρ_1) „Demnach suche man auf P solche drei Punktepaare, die Paare einer auf P gegebenen

Involution (η_1, η_2) sind und deren bez. Verbindungsgeraden ausserdem P berühren. Die Berührungspunkte entsprechen dann den auf R gegebenen drei Punkten μ_1, μ_2, μ_3 (und umgekehrt).“

Demnach reducirt sich die Erledigung unserer Frage auf die Untersuchung einer auf einer Curve P gegebenen gewöhnlichen Involution d. h. genauer der Verbindungsgeraden ihrer Punktepaare auf P.

Da eine Gerade die Curve R in vier Punkten trifft, haben wir zunächst:

σ) „Ist auf einer Curve P irgend eine gewöhnliche Punktinvolution gegeben, so giebt es vier Tangenten der Curve, die ein Punktepaar der Involution (als Restpunktepaar) aus P ausschneiden.“

Die weitere Untersuchung der von den Verbindungsgeraden aller Punktepaare der Involution (auf P) umhüllten Curve würde hier zu weit abführen; es möge genügen, das Hauptresultat, dessen Beweis sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten mittelst des Schnittpunkttheorems von P führen lässt, hier anzuführen.

σ_1) „Gegeben sei auf einer Curve P die Punktinvolution mit den Doppelelementen η_1, η_2. Dann umhüllen die Verbindungsgeraden der Punktepaare der Involution eine rationale Curve dritter Klasse I.

Diese berührt die Curve P an sechs Stellen (b).

Die bezüglichen Tangenten an P haben die Eigenschaft, dass der Berührungspunkt mit einem der Restpunkte ein Paar der Involution bildet.

Die Punkte (b) sind zugleich diejenigen von P, für die die sie mit dem in der Involution ent-

sprechenden Punkte verbindende Gerade zusammenfällt mit einer der beiden, für die von den drei Restpunkten zwei ein Paar der Involution bilden.

Ausserdem hat die Curve I noch die vier ausgezeichneten Tangenten des Satzes (σ), sowie die beiden Tangenten η_1, η_2 an P mit P gemein.

Desgleichen hat die Curve I noch vier Punkte P mit P gemein, für die die beiden von P ausgehenden und ein Punktepaar der Involution (das P nicht enthält) ausschneidenden Geraden coincidiren.

Auf diese Weise setzen sich die 16 gemeinsamen Punkte und die 18 gemeinsamen Tangenten zusammen, was das Schema erläutert:

$$16 = 2.6 + 4$$
$$18 = 2.6 + 4 + 2.$$

Es giebt eine Doppeltangente der Curve I, die aus P zwei Punktepaare der Involution ausschneidet.

Dem entspricht, dass die Gerade (η_1, η_2) der T-Ebene von zwei Kegelschnitten des Einheitsbüschels berührt wird, und daher die Berührungspunkte ein Paar von T bilden."

Die Beziehung zwischen den beiden Curven P und I ist aber einer höchst merkwürdigen Umkehrung fähig, auf die ich an andrer Stelle mal näher einzugehen gedenke und die hier nur folgendermaassen angedeutet sein soll.

Da die Curve I rational ist, so lässt sich auch auf ihr ein Parameter λ in bekannter Weise ausbreiten. Dann gilt der Satz:

σ_2) „Es giebt eine bestimmte symmetrische*) Verwandtschaft zweiten Grades ($a_{ik} = a_{ki}$)

---

*) Daher kann man die Form (22) auch so schreiben, dass sie als Form zweiten Grade in den Grössen ($\lambda + \mu$), ($\lambda\mu$) erscheint.

$$(22)\quad \lambda^2 (a_{00}\mu^2 + a_{01}\mu + a_{02}) + \lambda (a_{10}\mu^2 + a_{11}\mu + a_{12}) + (a_{20}\mu^2 + a_{21}\mu + a_{22}) = 0,$$

die auf die Tangenten von I angewandt, als Schnittpunkte der der Verwandtschaft angehörigen Tangentenpaare (λ, μ) wieder rückwärts die Punkte der Curve P erzeugt.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen rationalen Curve dritter Klasse I nebst einer beliebigen symmetrischen Verwandtschaft (22) auf ihr aus, so gelangt man so zu einer Curve P, für die es dann wieder eine bestimmte Involution

$$(23)\quad \alpha_0 + \alpha_1 (\lambda + \mu) + \alpha_2 \lambda\mu = 0$$

giebt, vermöge deren man nach Satz σ_1) wieder zur Curve I zurückgelangt."

166. Zum Schluss runden wir unsere allgemeinen Betrachtungen über das Verhältniss der Curven R und P dahin ab, dass wir letzterer, deren Lage bis dahin ganz irrelevant war, eine canonische Lagenform geben.

τ) „Man kann als Curve P (deren Schnittpunkttheorem mit Hülfe des Grundkegelschnitts φ zugleich die Transformation T darstellte) diejenige *Klassen*curve P nehmen, die aus dem Grundkegelschnitt der Curve R, als Klassenkegelschnitt aufgefasst, vermöge der zu T genau dualistischen Transformation T' hervorgeht."

In der That erhält man dann eine Klassencurve P, deren drei Doppeltangenten die Argumentenpaare $(a_i\, b_i)$ und deren Restpunktepaare die Argumentenpaare $(\alpha_i\, \beta_i)$ erhalten, was genügt, um sie statt der ursprünglichen Curve P zu substituiren.

Dann kann man das Verhältniss zwischen den Curven R und P so formuliren:

φ) „Ist in einer Ebene ein Dreieck und ein beliebiger (nicht zerfallender) Grundkegelschnitt φ gegeben, so ist damit sowohl die Punkttransformation T gegeben, vermöge deren φ in die Curve R, als auch die Geradentransformation T′, vermöge deren φ in die Curve P übergeht.

Dann stellt irgend ein Punktepaar von T (bezogen auf φ) ein Tangentenquadrupel von P mit gemeinsamem Centrum und irgend ein Geradenpaar von T′ (bezogen auf φ) ein Punktquadrupel von R auf gerader Linie dar.

Speciell repräsentiren die Punkte von R die Resttangentenpaare der Punkte von P und die Tangenten von P die Restpunktepaare der Tangenten von R.“

Oder kürzer: „Die Punkte von R resp. die Tangenten von P repräsentiren, auf φ als Normkegelschnitt bezogen, das Schnittpunkttheorem von P resp. R.“

167. Auf die grosse Zahl der besondern Fälle, in denen die Curven R, P specielle Singularitäten aufweisen, soll hier nicht näher eingegangen werden: nur ein Fall von besonderer Wichtigkeit möge zur Sprache kommen, um die Betrachtungen der Nr. 33, die damals von der Projektion einer cubischen Raumcurve auf eine Ebene zuerst auf die quadratische Transformation der dort erwähnten Natur führte, jetzt in ein helleres Licht zu stellen.

Besitzt nemlich die Curve P eine dreifache Tangente (cf. über die dazu nöthige Bedingung pg. 184), so ist der Grundkegelschnitt φ dem Fundamentaldreieck einbeschrieben (u. umg.), dann geht die reciproke Curve R in eine solche mit drei Spitzen über.

In diesem Falle (und nur in diesem) existirt ein φ umschriebenes Poldreiseit des Einheitsbüschels. Die Einheits-

geradenpaare werden unbestimmt, wie ja auch daraus folgt, dass die Coefficienten von u_0^2, u_1^2, u_2^2 in der Klassengleichung von φ verschwinden (cf. Formel 21).

Mithin ist die Transformation T erst nach Annahme eines beliebigen ihr angehörigen Punktepaares *) bestimmt.

Wählt man als solches den sich selbst entsprechenden Punkt, der den drei Verbindungsgeraden der Dreiecksecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten angehört, so ist man damit genau auf die Transformation der Nr. 33 gekommen.

Construirt man für jede Ecke zu der bez. Verbindungsgeraden (in Bezug auf das Paar der bez. Dreiecksseiten) den vierten harmonischen Strahl, so sind die Eckpunkte dieses neuen Dreiecks die drei weiteren Einheitspunkte von T.

Derjenige Kegelschnitt φ_1, der diese drei vierten harmonischen Strahlen in den Ecken des Dreiecks berührt, is[t]

*) Besitzt die dreifache Tangente von P die Argumente α, β, und wird

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4) \equiv \psi(\lambda)$$

gesetzt, so hat das Schnittpunkttheorem von P die Form (cf. Nr. 113) =

$$p_1\,\psi(\alpha) + p_2\,\psi(\beta) + p_3\,\psi(\gamma) = 0$$

$$q_1\,\psi(\alpha) + q_2\,\psi(\beta) + q_3\,\psi(\gamma) = 0.$$

Der Willkürlichkeit der Grössen $(pq)_{ik}$ entspricht die Willkürlichkei[t] des für T noch anzunehmenden Punktepaares. Zwischen diesen Grösse[n] und den Constanten ν der Transformation T bestehen drei bilineare Beziehungen.

Trotzdem der Grundkegelschnitt φ für die Transformation T der Nr. 33 eine specielle Lage hat, so erkennt man doch leicht, dass sich jede andere Transformation T auf sie (mit Hülfe einer speciellen Collineation) zurückführen lässt, denn es gilt der Satz:

„Die allgemeinste quadratische ein- eindeutige, aber nicht involutorische Transformation der Ebene lässt sich immer zusammensetzen aus jener speciellen Transformation T und einer allgemeinen Collineation."

Dieser Satz liegt der Nr. 34 implicite zu Grunde.

wieder umgekehrt der Grundkegelschnitt einer bestimmten Transformation T_1, die das Schnittpunkttheorem einer Curve P mit drei Wendetangenten (also einer zur Curve R, die vermöge T dem Kegelschnitt φ entsprach, gerade dualistischen) darstellt.

Mit Hülfe des Satzes pg. 179 formulirt sich das Hauptresultat für unsern Specialfall so:

ψ) „Die Transformation T der Nr. 33 ist das Bild des Schnittpunkttheorems einer Curve P mit dreifacher Tangente ($\alpha\,\beta\,\gamma$), für die einer der Doppelpunkte die Argumente (ξ, η) besitzt, die zu ($\alpha\,\beta\,\gamma$) aequianharmonisch sind."

Sehen wir zum Schluss noch, wie sich der Gang von der allgemeinen nicht-involutorischen Transformation T zu der letzterwähnten Specialtransformation T vollzieht.

Die erstere ist bekanntlich gegeben durch die Relationen:

$$24)\quad \rho x_i = \frac{k_i}{y_i} = \frac{k_i}{a_{ix}} = \frac{k_i}{a_{i0}\,x_0 + a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2} \quad (i = 0,\ 1,\ 2)$$

wo die x resp. y sich auf die beiden verschiedenen Coordinatendreiecke (zweier als verschieden gedachter, sich deckender Ebenen) beziehen.

Durch diejenige Collineation, vermöge der die Seiten des zweiten Dreiecks in die bezüglichen des ersten hineinfallen, entsteht eine involutorische Transformation T:

$$25)\quad \rho x_i = \frac{k_i'}{x_i}$$

wo die k' noch ganz willkürliche Constanten sind.

χ) „Dieser zweifachen Willkürlichkeit entspricht einmal, dass man als *Grundkegelschnitt* φ der Transformationen T (25) der Reihe nach jeden *)

---

*) Es mag dabei noch einmal betont werden, dass dann (für jeden Einheitspunkt) die Coefficienten der Quadrate der u in der Klassengleichung

dem x-Dreieck einbeschriebenen wählen kann; in andrer Hinsicht das zweifach ausgedehnte System der *Collineationen*, die bei festem x-Dreieck der Reihe nach jeden Punkt der Ebene zum *Einheitspunkt* der Coordinatenbestimmung machen."

In der That ist bei fest gewähltem Kegelschnitt φ nach der oben mitgetheilten Construktion der Einheitspunkt bestimmt und umgekehrt bei fest gewähltem Einheitspunkt der zugehörige Kegelschnitt.

Werfen wir dagegen einen Rückblick auf die Behandlung der Curven R in diesem §., so war das Eigenthümliche der Betrachtungsweise im Wesentlichen folgendes.

Wir haben früher (§. 2 ff.), als wir von einer festen, gegebenen Curve R d. h. ihrer Gleichung $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ ausgingen, die ausser den (11) Constanten der Curve noch drei weitere, die der Willkürlichkeit der Parametervertheilung auf der Curve zu Grunde liegen, enthielten, das Schnittpunkttheorem der Curve so abgeleitet, dass wir mittelst einer ganz beliebigen allgemeinen Collineation acht Constanten der Curve eliminirten, wie dies ja a priori vorauszusehen war. Demnach hängt das Schnittpunkttheorem der Curve nur noch von den (drei) ternären absoluten Invarianten derselben nebst denselben drei weiteren Constanten ab, wie die gegebene Parametergleichung der Curve. Die Elimination der letzteren ergiebt aber die absoluten Invarianten des Schnittpunkttheorems, oder nach den Entwicklungen des §. 11 die absoluten Invariant-Combinanten der Gruppe der Schnittpunktformen.

Demnach muss es immer möglich sein, mittelst des Schnittpunkttheorems und einer ganz bestimmten Colli-

jedes Kegelschnitts φ verschwinden, mithin ihre Verhältnisse, die ja nach (21) den Verhältnissen der k' gleich sind, unbestimmt, d. h. willkürlich sind.

neation umgekehrt zu der ursprünglichen, festen Curve (auch ihrer ganzen Lage in der Ebene nach) zurückzukehren.

ω) „Dies ist aber im Laufe der Entwicklung in der Art geschehen, dass wir das Doppelpunktsdreieck der Curve R zum Fundamentaldreieck der durch das Schnittpunkttheorem der Curve bestimmten Transformation T wählten und als den noch verfügbaren Grund- (Norm-) Kegelschnitt derselben den Grundkegelschnitt der Curve. Dann ist die vermöge T dem Kegelschnitt φ entsprechende Curve R gerade wieder die gegebene.

Der Willkürlichkeit der Parameterbestimmung auf φ entspricht vollständig die der analogen auf R und umg.“

Natürlich ist dies nicht die einzige (eindeutige) Art der Reconstruktion der Curve aus ihrem Schnittpunkttheorem: man hätte z. B. auch drei der Doppeltangenten, gerade wie oben die drei Doppelpunkte zu Grunde legen können.

Man sieht, dass bei dieser unserer Auffassung die 11 Constanten der Curve sich zerlegen in $6 + 5$, von denen die ersteren auf die Lage dreier Punkte in der Ebene, die letzteren auf die Lage des Normkegelschnitts gehen.

Auf die merkwürdigen Beziehungen, die sich für die rationalen Curven höherer Ordnung (und im Raume etc.) bei weiterer Ausdehnung unseres Verfahrens zwischen reinen Argumenten- und reinen Lagensätzen ergeben, gedenke ich bei künftiger Gelegenheit näher einzugehen.

Was endlich die schon bekannte Theorie der Curven R (bes. vierter Ordnung) angeht, so verweise ich vor Allem auf die wichtige Abhandlung des Herrn Brill (Math. Ann. XII), sowie auf die Arbeiten[55] von Em. Weyr: dagegen betreffs der quadratischen Transformation auf die Lehrbücher wie auf die Arbeiten[56] von Rosanes, Aschieri, Battaglini.

Wir kommen nunmehr zur letzten und wichtigsten Partie des zweiten Capitels, die die Involutionen vierter Ordnung auf den cubischen Raumcurven von Neuem aufnimmt, um die tiefeingreifende Wichtigkeit der ersteren für die letztere wenigstens in den Hauptzügen darzulegen.

Abschnitt IV.

Die biquadratische Involution auf der cubischen Raumcurve. Zweiter Theil.

§. 28.

Das Schnittpunkttheorem der R_4^2 im Raume.

168. Dieser Theil untersucht des Genaueren die biquadratischen Involutionen mit (sechs) gemeinsamen Elementenpaaren, sowie die sich daran anschliessenden geometrischen Configurationen.

Wir knüpfen wieder an das Schnittpunkttheorem (pg. 239 Formel Nr. (6)) der Curven R_4^2 an. Man verfährt zunächst, wie bei Aufstellung der H-Kegelschnitte (cf. Nr. 51) und eliminirt λ_4. Dann sind die Elemententripel der dreigliedrigen Gruppe $C^{(2)}$ (pg. 239) gegeben durch

$$(1)\quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 s_3, \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 + b_4 s_3 \end{vmatrix}$$
$$s_0^2 p_{01} + s_1^2 p_{12} + s_2^2 p_{23} + s_3^2 p_{34} + s_0 s_1 p_{02} + s_1 s_2 p_{13} + s_2 s_3 p_{24}$$
$$+ s_0 s_2 (p_{03} - p_{12}) + s_0 s_3 (p_{04} - p_{13}) + s_1 s_3 (p_{14} - p_{23}) = 0,$$
$$\text{wo } p_{ik} = (ab)_{ik}.$$

Aus den zwischen den p_{ik} herrschenden Relationen der Nr. 155, aus denen man jetzt als linear unabhängige etwa diejenigen drei aussuche, die den Index 0, 2, 4 resp. nicht aufweisen, folgt:

α) Um eine quaternäre quadratische Form a_s^2 in die Form (1) zu bringen, sind die drei Bedingungen*) erforderlich (u. umg.):

$$(2)\begin{cases} a_{00}a_{22}-4a_{01}a_{12}+a_{11}(2a_{02}+a_{11})=0 & \equiv A_4 \\ a_{00}a_{33}-(2a_{02}+a_{11})(2a_{13}+a_{22})+4a_{12}(a_{03}+a_{12})=0 & \equiv A_2 \\ a_{11}a_{33}-4a_{12}a_{23}+a_{22}(2a_{13}+a_{22})=0 & \equiv A_0 \end{cases}$$

169. Die Bedeutung dieser Gleichungen ist bald zu eruiren. Auf die räumliche (cubische) Normcurve N_3 bezogen stellt (1) eine Fläche zweiter Ordnung H_2 (oder kürzer H) dar, deren Schnittpunkte mit der Curve durch die Doppelelemente der Involution (cf. vorigen §., Formel 4, 10)

$$(3)\ a_\lambda + k\, b_\lambda = 0$$

nemlich $(4)\ J = 0$

gegeben sind, die andrerseits (cf. Satz δ pg. 244) die Wendepunkte der R_4^2:

$$(5)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda)$$

darstellt, wo die φ die zu (3) conjugirte Gruppe zusammensetzen.

Zu jedem (1) genügenden Tripel gehört ein weiteres Element λ_4, das mit dem Tripel ein Quadrupel der Gruppe (5) bildet, die man durch drei ganz beliebig gewählte Quadrupel $\varphi(\lambda)$ festlegen kann. Dies liefert den bekannten[57] Satz**):

β) „Die Ecken irgend dreier einer cubischen Raumcurve φ umschriebenen Tetraeder liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung H. Dieser

*) Beispielsweise geht durch resp. Multiplication der zweiten und dritten Bedingung mit a_{22}, resp. $(2a_{02}+a_{11})$ und Addition die Bedingung $A_1 = 0$ hervor, der unter den p_{ik}-Relationen der Nr. 155 die den Index 1 nicht aufweisende entspricht; analog durch Multiplication der ersten und zweiten mit $2a_{13}+a_{22}$ resp. a_{11} und Addition die andere: $A_3 = 0$.

**) Über die Erweiterung desselben cf. Kap. III. Die dualistischen Gegensätze sind überall unterdrückt.

kann man ∞^2 solche Tetraeder einbeschreiben und zwar ist jeder Punkt der Fläche Eckpunkt *eines* solchen Tetraeders."

Nun entsprechen den drei Doppelpunkten der R_4^2 (5) $(\alpha_1 \beta_1)$ drei solche Elementenpaare $(\alpha_1 \beta_1)$, die mit unendlich vielen Paaren Quadrupel der Gruppe (5) bilden d. h.

β_1) „Die Fläche H des Satzes β) hat die Eigenschaft, dass drei Axen der Raumcurve $(\alpha_1 \beta_1)$ ganz auf ihr liegen."

Da umgekehrt diese drei Elementenpaare $(\alpha_1 \beta_1)$ das Schnittpunkttheorem der Curve (5), und somit die Fläche (1) eindeutig bestimmen, so folgt:

β_2) „Soll von einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine cubische Raumcurve der Satz β) gelten, so sind dazu die Bedingungen des Satzes β_1) nothwendig und hinreichend.

Diese Bedingungen sind im Falle der Normcurve durch (2) dargestellt."

In der That ist ja durch drei Gerade, die sie enthalten soll, im Allgemeinen stets eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt. Werden von den drei Doppelpunkten der R_4^2 (5) ein resp. zwei resp. drei zu Spitzen, so werden von den bezüglichen Axen der Curve ein resp. zwei resp. drei *) zu Tangenten. Besitzt die Curve (5) einen dreifachen Punkt (α, β, γ), so wird die Fläche zum Kegel, für den die Axen $(\alpha\beta)$ $(\alpha\gamma)$ $(\beta\gamma)$ Kanten sind. Der doppelt unendlichen Schaar solcher Kegel entsprechen die drei homogenen willkürlichen Constanten (pq) (cf. pg. 268 Anm.). Und ähnlich in andern speciellen Fällen

*) Auf die letzteren Flächen, die also drei Tangenten der Curve enthalten, ist schon früher (pg. 113) aufmerksam gemacht; desgleichen auf die allgemeinen Flächen II Nr. 134.

170. Von irgend einem Punkte $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ der Fläche H gehen die drei Axen $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_1 \lambda_3)$ $(\lambda_2 \lambda_3)$ aus, die aus der Fläche drei Restpunkte ausschneiden, deren Verbindungsebene nach Satz (β) eine Ebene (λ_4) der Curve ist. Dann bilden die vier λ ein Quadrupel der Gruppe (5) d. h. sie genügen dem Schnittpunkttheorem der Curve (5):

$$(6) \quad a_8 = 0, \quad b_8 = 0.$$

Geht man umgekehrt von einer beliebigen Curvenebene (λ_4) aus, so giebt es noch einfach unendlich viele Tetraeder des Satzes (β), die sie als eine Ebene besitzen.

Die Gegenecken der Ebene (λ_4) in allen diesen Tetraedern durchlaufen die Gerade:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1 + \lambda_4 A_2 &= 0 \\ B_1 + \lambda_4 B_2 &= 0 \end{aligned}$$

d. i. eine Gerade der Fläche H. Die Punkte $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ dieser Geraden repräsentiren andrerseits die Punktetripel, die in der Ebene der Curve R_4^2 (5) der Strahlbüschel des Punktes (λ_4) aus ihr ausschneidet. Und da es für jeden Punkt (λ_4) der Curve R drei Geraden giebt, die ihn mit den Doppelpunkten $(\alpha_i \beta_i)$ verbinden, so folgt:

β_3) Jede Ebene der cubischen Raumcurve φ ist eine gemeinsame Ebene von unendlich vielen φ um- und der Fläche H einbeschriebenen Tetraedern. Ihre Gegenecken in denselben durchlaufen eine Gerade der Fläche H. Diese Geraden bilden die eine Schaar der Fläche, und zwar die, der die drei Axen $(\alpha_i \beta_i)$ (der Curve φ) nicht angehören. Auf diese Weise sind also die „Geraden (λ_4) jener Schaar den Ebenen (λ_4) der Curve φ projektivisch zugeordnet".

Somit schneiden also auf der Curvenebene (λ_4) die von

den Punkten der Geraden (λ_4) an die Curve φ gehenden Ebenentripel unendlich viele Dreiecke aus, die dem der Ebene (λ_4) und der Fläche H gemeinsamen Kegelschnitt einbeschrieben sind.

Von den Ecken eines solchen Dreiecks gehen resp. die Axenpaare aus:

$$(8) \quad (\lambda_4 \lambda_1)(\lambda_4 \lambda_2); \; (\lambda_4 \lambda_1)(\lambda_4 \lambda_3); \; (\lambda_4 \lambda_2)(\lambda_4 \lambda_3)$$

die alle in der Ebene (λ_4) liegen.

Bekanntlich umhüllen aber alle in einer Curvenebene (λ_4) befindlichen Axen der Curve einen Kegelschnitt, den Schnitt der Ebene mit der Tangentenregelfläche der Curve. Dieser heisse der Normkegelschnitt*) der bez. Ebene.

Mithin giebt es in der Ebene (λ_4) unendlich viele Dreiecke, die ihrem Schnittkegelschnitt mit der Fläche H ein- und dem Normkegelschnitt der Ebene umbeschrieben sind d. h. nach der früheren Bezeichnung (Nr. 51):

β_4) „Jede Ebene der Curve φ trifft die Fläche H (des Satzes β) in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts."

---

*) Mit der doppeltzählenden Tangente (λ) der Curve bildet dieser Kegelschnitt bekanntlich den vollständigen Durchschnitt der Ebene (λ_4) und der Tangentenregelfläche der Curve.

Da z. B. die Ebene $s_3 = 0$ der Normcurve von den Ebenen (λ) der Curve:

$$s_\lambda \equiv s_0 \lambda^3 - s_1 \lambda^2 + s_2 \lambda - s_3 = 0$$

in den Geraden

$$s_0 \lambda^2 - s_1 \lambda^2 + s_2 = 0$$

getroffen wird, die den Normkegelschnitt

$$4 s_0 s_2 - s_1^2 = 0$$

umhüllen, so ist die Bezeichnung „Normkegelschnitt" einer Curvenebene gerechtfertigt.

171. Dies ist aber auch in der That die eigentliche Bedeutung der Gleichungen (2). Die erste und dritte zeigen nach pg. 99 ohne Weiteres, dass die Eigenschaft des letzten Satzes den Curvenebenen (0) (∞) zukommt.

Andrerseits ist nach beliebiger Annahme der Doppelpunktsargumente (α_1 β_1) der Curve R ihr Schnittpunkttheorem eindeutig festgelegt und demnach auch die Fläche (1), der die Eigenschaft des Satzes β_1) zukommt. Daraus ist ersichtlich, dass die Gesammtheit der Bedingungen (2) eine Eigenschaft von Fläche und Curve darstellt, die in quaternärem Sinne eine invariante ist. Da aber die Argumente (0) (∞) nur dazu dienten, die Curve auf ein passendes Coordinatentetraeder zu beziehen, so muss, was von ihnen gilt, auch von jedem andern Paar gelten, d. h. es gilt der Satz β_4).

Man kann demnach auch so sagen: Die zweite der Bedingungen (2) sagt, unter Voraussetzung der beiden andern, aus, dass nunmehr jede Ebene die Eigenschaft der Ebene (0) oder (α) theilt, oder auch, dass nunmehr die Gleichung, die für irgend eine Fläche zweiter Ordnung F ($a_s^2 = 0$) die Curvenebenen bestimmt, die sie in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts treffen, identisch erfüllt wird.

Dies soll die Rechnung bestätigen.

172. Die Coordinaten eines Punktes einer Normcurvenebene (α) sind (cf. Nr. 30):

(9) $\rho s_0 = \sigma_0, \; \rho s_1 = \alpha\sigma_0 + \sigma_1, \; \rho s_2 = \sigma_2 + \alpha\sigma_1, \; \rho s_3 = \alpha\sigma_2$

wo die σ aus zwei Variabeln λ_1 λ_2 gebildet sind.

Die Substitution in die Gleichung der Fläche F liefert:

$$(10) \quad \varphi_0 + 2\,\alpha\,\varphi_{0,\infty} + \alpha^2\,\varphi_\infty = 0$$

wo $\varphi_0 = 0$ resp. $\varphi_\infty = 0$ den Kegelschnitt darstellen, der der Fläche F und den Curvenebenen (0) resp. (∞) gemein ist und $\varphi_{0,\infty} = 0$ alle in Bezug auf F conjugirten Punktepaare,

von denen immer der eine Punkt der einen und der andere der andern Ebene angehört.

Variirt α, so erhält man in Gleichung (10) alle Schnitte von F und den Ebenen der Curve.

Soll nun (10) zu einem H-Kegelschnitt des bez. Normkegelschnitts werden, so ergiebt die bekannte Bedingung der Nr. 51 nach einiger Rechnung:

$$(11)\quad \alpha^4 A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha A_3 + A_4 = 0.$$

Dabei sind die A_i die linken Seiten der Bedingungen {(2) (nebst anm.)} und gehen aus den linken Seiten der fünf p_{ik} Relationen (cf. pg. 248) P_i (wo in P_i der Index i nicht auftritt) mittelst der aus Gleichung (1) fliessenden Relationen hervor (und umg.):

$$(12)\quad p_{01} = a_{00},\ p_{12} = a_{11},\ p_{23} = a_{22},\ p_{34} = a_{33};$$
$$p_{02} = 2\,a_{01},\ p_{13} = 2\,a_{12},\ p_{24} = 2\,a_{23},\ p_{03} = 2\,a_{02} + a_{11},$$
$$p_{04} = 2\,(a_{03} + a_{12}),\ p_{14} = 2\,a_{13} + a_{22}.$$

Nun bestehen nach pg. 273 anm. zwischen den A die beiden Relationen:

$$(13)\quad \begin{cases} A_4\,(2\,a_{13} + a_{22}) + A_2\,a_{11} - A_0\,a_{00} = 2\,A_3\,a_{12} \\ -A_4\,a_{33} + A_2\,a_{22} + A_0(2a_{02} + a_{11}) = 2\,A_1\,a_{12} \end{cases}$$

denen gemäss (12) die andern zwischen den P correspondiren:

$$(13')\quad \begin{cases} P_4\,p_{14} + P_2\,p_{12} + P_0\,p_{10} = p_{31}\,P_1 \\ P_4\,p_{34} + P_2\,p_{32} + P_0\,p_{30} = p_{13}\,P_3 \end{cases}$$

(dabei sind vorläufig die zehn p_{ik}, aus denen die P gebildet sind, als ganz unabhängige Grössen zu denken, gerade wie die a_{ik}). Demnach gilt zuvörderst der Satz:

γ) „Es gibt im Allgemeinen immer ein Quadrupel von Ebenen (11) einer cubischen Raumcurve, die irgend eine Fläche zweiter Ordnung in einem H-Kegelschnitt (des in der Ebene befindlichen Normkegelschnitts) treffen.“

Aber dieses Ebenentetraeder ist zugleich der Fläche einbeschrieben, wie nun gezeigt wird.

Durch eine lineare Transformation auf der Curve kann man erreichen, dass zwei der vier Wurzeln von (11) die Werthe 0, ∞ annehmen. Dann verschwinden A_0, A_4 (und somit auch P_0, P_4) und Gleichung (11) geht wegen der Relationen (13) über in (wenn α, β homogene Variable sind):

$$(14)\ \frac{\alpha\beta A_2}{2a_{12}}(\alpha^2 a_{22} + 2\beta\alpha a_{12} + \beta^2 a_{11}) = 0$$

woraus in der That sofort einleuchtet, dass, wenn auch drittens A_2 (und damit P_2) verschwindet, die Gleichung (11) identisch befriedigt wird, was den Satz β_4) zur Folge hat.

„Dann werden die p_{ik} wieder die ursprünglichen Grössen $(ab)_{ik}$ und die Fläche ist durch (1) dargestellt.“

Jetzt verschwinde aber A_2 nicht.

Dann sind die Coordinaten eines Punktes der Axe $(0, \infty)$ der Curve:

$$(13)\ \rho s_0 = 0,\ \rho s_1 = \beta,\ \rho s_2 = \alpha,\ \rho s_3 = 0$$

und demnach die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Fläche F gegeben durch:

$$(16)\ \alpha^2 a_{22} + 2\alpha\beta a_{12} + \beta^2 a_{11} = 0.$$

Die Vergleichung mit (14) beweist die aufgestellte Behauptung und wir haben somit:

γ_1) „Es giebt im Allgemeinen immer ein einziges einer cubischen Raumcurve φ um- und einer Fläche zweiter Ordnung F einbeschriebenes Tetraeder (11).

Die Ebenen desselben treffen F in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts. Giebt es noch eine fünfte Ebene mit gleicher Eigenschaft, so erfreuen sich ihrer auch alle Ebenen der Curve. Dann giebt es auch gleich doppelt

unendlich viele der Fläche ein- und der Curve um-
beschriebene Tetraeder.

Dann verschwindet die linke Seite von (11),
eine simultane Covariante*) von Fläche und Curve,
identisch.

Dies ist aber nur drei Bedingungen aequi-
valent, da zwischen den Coefficienten von (11
(mit Hülfe der Coefficienten von F) zwei linear-
Relationen bestehen.

Dass umgekehrt aus dem ersten Satze von γ_1) wied e
Satz γ) hervorgeht, ist sofort zu sehen, denn jede Ebene d e
der Curve um- und der Fläche einbeschriebenen Tetraede r
trifft F in einem Kegelschnitt, dem ein Dreieck ein- und de m
Normkegelschnitt der Ebene umbeschrieben ist. Dann ab er
giebt es ja unendlich viele solcher Dreiecke d. h. der er ste
Kegelschnitt ist ein H-Kegelschnitt des zweiten.

173. Hier bietet sich zugleich die analoge Frage na ch
den Ebenen einer cubischen Raumcurve, die eine Fläc he
zweiter Ordnung F in dem F-Kegelschnitt ihres Normkeg el-
schnitts (d. i. dem den letzteren stützenden) treffen.

Die Anwendung der oft gebrauchten Bedingung auf die
Kegelschnittschaar (10) liefert:

$$(17) \quad \alpha^2 (a_{13} - a_{22}) + \alpha\beta (a_{03} - a_{12}) + \beta^2 (a_{02} - a_{11}) = 0$$

oder in den p_{ik}:

$$(17') \quad \frac{1}{2}\left\{\alpha^2 (p_{03} - 3p_{12}) + \alpha\beta (p_{01} - 2p_{13}) + \beta^2 (p_{14} - 3p_{23})\right\} = \frac{1}{2} Q = 0.$$

Dies liefert zunächst:

δ) „Es giebt im allgemeinen immer ein P ar

---

*) Im Falle die Fläche die Curve stützt und aus ihr das Sextu pel f ausschneidet, ist diese Covariante die einzige biquadratische Covaria nte der Form f vom zweiten Grade in den Coefficienten, die es bekannt lich giebt.

(17) von Ebenen einer cubischen Raumcurve, die irgend eine Fläche zweiter Ordnung in einem F-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts treffen."
"Nur wenn die Fläche die Curve stützt, giebt es unendlich viele (d. s. alle Ebenen der Curve)."

In der That sieht man dies auch so ein. In der ganzen der Curve umschriebenen Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse giebt es eine Schaar, deren Individuen auf der Fläche F ruhen. Sie haben alle eine Raumcurve vierter Klasse gemein, die in die gegebene Curve und eine Axe derselben zerfällt. Die beiden von der Axe an die Curve gehenden Ebenen enthalten je einen Normkegelschnitt. Diese beiden Kegelschnitte sind die einzigen uneigentlichen Flächen der auf F ruhenden Schaar. Dann ruhen sie aber auch auf dem Kegelschnitte, den ihre Ebene aus F ausschneidet.

q. e. d.

Soll die Gleichung (17) identisch verschwinden, so stützt nach Früherem die Fläche F die Curve und von jeder Ebene der Curve gilt der Satz δ).

Werden aber die a_{ik} den Bedingungen $A_i = 0$ (und damit die p_{ik} den Bedingungen $P_i = 0$) unterworfen, so geht die Fläche F wieder in die Fläche II (1) über.

Dann ist die linke Seite von (17′) (abgesehen vom Faktor $\frac{1}{2}$) die quadratische, bilineare Combinante Q der Schnittpunkttheorems-Involution

$$(3) \quad a_\lambda + k b_\lambda = 0$$

d. h. die dritte Ueberschiebung der Formen a_λ, b_λ.

Bekanntlich ist aber nach Gordan[58] eine biquadratische Involution (3) in eindeutiger*) Weise bestimmt, sobald

*) Von diesem Satze geht auch Stephanos aus, Comptes Rendus Dec. 1881.

man neben der ersten Ueberschiebung der Formen a_λ, b_λ (d. i. ihrer Funktionaldeterminante) auch noch die angegebene quadratische Combinante kennt. Dies liefert den Satz:

ε) „Zu jeder der fünf Flächen zweiten Grades H, die durch irgend sechs Punkte einer cubischen Raumcurve gehen und drei Axen der Curve ganz enthalten, gehört ein Ebenenpaar der Curve, das die Fläche in einem ihren resp. Normkegelschnitt stützenden Kegelschnitt trifft.

Dies wird dargestellt durch die quadratische, in den p_{ik} lineare Combinante Q der zugehörigen biquadratischen Involution, deren Quadrupel-gruppe conjugirt ist zur Gruppe der der Curve um- und der Fläche einbeschriebenen Tetraeder. Umgekehrt gehört zu jedem solchen Ebenen-paar nur eine *einzige* Fläche H."

Von diesem Ebenenpaar sind noch weitere Eigenschaften angebbar.

Die quadratische Combinante (17′) ist auch definirbar als dritte Ueberschiebung der nach α genommenen ersten Polaren der Formen a_λ, b_λ. Andrerseits ist dann (cf. pg. 68) die Invariante i der Funktionaldeterminante dieser Polaren das Quadrat der Form (17′).

Nun waren in Satz β_3 die Geraden (α) der einen Schaar der Fläche H den Ebenen (α) der Curve projektivisch zugeordnet. Die von den Punkten der Geraden (α) an die Curve gehenden Ebenentripel sind gerade durch die cubische Involution der angegebenen ersten Polaren dargestellt. Mithin liefert deren Funktionaldeterminante bei festem α die vier

Das Produkt der fünf quadratischen Combinanten, die mit einer gegebenen Funktionaldeterminante die fünf zugehörigen biquadratischen Involutionen bestimmen, ist dann eine Covariante (zehnter Ordnung) der Funktionaldeterminante.

Tangenten der Curve, die die Gerade (α) treffen. Verschwindet die Invariante i derselben, so sind die vier Tangenten aequianharmonisch und die Gerade (α) ist im Nullcomplex der Curve sich selber conjugirt. Mithin haben wir:

δ_1) „Construirt man die im Nullcomplex der cubischen Curve zur Fläche H conjugirte, so treffen sich beide in zwei Geradenpaaren, von denen das eine der einen, das andere der andern Regelschaar von H angehört. Der die drei Axen (α_i β_i) der Curve enthaltenden Regelschaar (cf. Satz β_3) gehört dasjenige Paar an (das von zwei aequianharmonischen Tangentenquadrupeln der Curve getroffen wird und) das dem Ebenenpaar des Satzes δ) projectivisch zugeordnet ist."

174. Excurs. Es möge hier die fundamentale Bedeutung der quadratischen Combinante (17') Q für die ebene Curve R, deren Schnittpunktformen die Involution (3) bilden, eingeschoben werden. Dabei werden die von Herrn Brill erhaltenen eleganten Resultate eine neue, nicht unwichtige Beleuchtung erfahren.

Der Satz δ_1) spricht sich in der Ebene ohne Weiteres so aus:

δ_2) Für irgend eine Curve R_4^2: „$\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$" giebt es immer ein Paar von Punkten auf ihr, von denen aequianharmonische Tangentenquadrupel an sie gehen. Dies ist das Paar Q, wo Q die einzige in den Coefficienten der φ_i (oder auch in den Δ_{ik} (cf. §. 1) lineare quadratische Combinante ist, von der der Gordan'sche Satz gilt."

Diesem Punktepaar kommt aber eine noch merkwürdigere Beziehung zu:

δ_3) „Das Punktepaar Q ist das von dem Brill-

schen Wendekegelschnitte der Curve R (d. i. dem durch die sechs Wendepunkte gehenden) aus ihr ausserdem noch ausgeschnittene."

Herr Brill hat die Existenz des Wendekegelschnitts in der schon erwähnten Abhandlung (Math. Ann. XII „Ueber rationale Curven vierter Ordnung") erwiesen, und in einer weiteren Arbeit (Math. Ann. XIII „Ueber die Hesse'sche Curve") den Beweis erheblich vereinfacht, sodass die Rechnung fast eliminirt ist. Zugleich theilt hier d. H. V. einen weiteren eleganten Satz mit (cf. unten), der schon vermuthen lässt, dass das in Rede stehende Punktepaar eine tiefere Bedeutung für die Curve R hat.

Herr Brill geht von der Hesse'schen Curve der gegebenen aus, die ja die Wendepunkte ausschneidet (und ausserdem in den Doppelpunkten berührt), und zeigt, wie sie in den Doppelpunkten, was ihr Verhalten zur Curve betrifft, von einer andern, wesentlich einfachern Curve φ „vertreten" werden kann, woraus dann der gemeinte Satz fliesst.

Der folgende neue Beweis setzt die Kenntniss der Hesse'schen Curve nicht voraus und benützt nur die für die Curve als rationale charakteristische Form des Schnittpunkttheorems.

Mit Rücksicht auf die Argumente der Doppelpunkte $(\alpha_i\ \beta_i)$ lässt sich, wie bekannt und schon früher pg. 191 bemerkt, das Schnittpunkttheorem ersetzen durch die drei (linear abhängigen) Gleichungen

$$(18)\quad \frac{(\lambda_1-\alpha_i)\,(\lambda_2-\alpha_i)\ldots(\lambda_4-\alpha_i)}{(\lambda_1-\beta_i)\,(\lambda_2-\beta_i)\ldots(\lambda_4-\beta_i)}=\tau_i=$$

$$\frac{(\alpha_k-\alpha_i)\,(\alpha_l-\alpha_i)\,(\beta_k-\alpha_i)\,(\beta_l-\alpha_i)}{(\alpha_k-\beta_i)\,(\alpha_l-\beta_i)\,(\beta_k-\beta_i)\,\beta_l-\beta_i)}\ (i=1,2,3).$$

Dann folgt sofort, dass dasjenige für acht Punkte der Curve auf einem Kegelschnitte so lautet (wo diese drei Gleichungen linear unabhängig sind)

$$(19)\quad \frac{(\lambda_1-\alpha_i)\ldots(\lambda_8-\alpha_i)}{(\lambda_1-\beta_i)\ldots(\lambda_8-\beta_i)} = \tau_i^2 \; (i = 1, 2, 3).$$

Vermöge der linearen Transformation, die den Doppelpunkt $(\alpha_i\ \beta_i)$ zum Doppelpunkt $(0,\ \infty)$ macht:

$$(20)\quad \mu = \frac{\lambda-\alpha_i}{\lambda-\beta_i}$$

geht eine der Gleichungen (18) (19) in die kanonische Form über:

$$(21)\quad \mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4 = \tau_i,\quad \mu_1\,\mu_2\ldots\mu_8 = \tau_i^2$$

während die beiden andern Formen in ihrer Gestalt nicht verändert werden und, wenn die neuen Argumente der beiden andern Doppelpunkte jetzt $(A_k\ B_k)$ $(A_l\ B_l)$ lauten, sich so schreiben

$$(21')\quad \frac{(\mu_1-A_k)\ldots(\mu_4-A_k)}{(\mu_1-B_k)\ldots(\mu_4-B_k)} = \tau_k$$

$$\frac{(\mu_1-A_k)\ldots(\mu_8-A_k)}{(\mu_1-B_k)\ldots(\mu_8-B_k)} = \tau_k^2 \; (k = k, l)$$

Andrerseits kann man das Schnittpunkttheorem (18) dann auch darstellen durch:

$$(22)\quad \begin{cases} a_0\,s_0 + 0.s_1 + 0.s_2 + 0.\,s_3 + a_4\,s_4 = 0 \\ b_0\,s_0 + b_1\,s_1 + b_2\,s_2 + b_3\,s_3 + b_4\,s_4 = 0 \end{cases}$$

wo wegen (21): $\dfrac{-a_0}{a_4} = \tau_i$ ist.

Mithin nehmen die p_{ik} jetzt die Werthe *) an:

*) Mithin nimmt die Funktionaldeterminante der Schnittpunktformen vermöge (20) die Form an,

$$J = p_{01} + 3\,p_{02}\,\lambda + 3\,(p_{03} + 2\,p_{12})\,\lambda^2 + (p_{04} + 8\,p_{13})\,\lambda^3$$

$$+ p_{34}\,\lambda^6 + 3\,p_{24}\,\lambda^5 + 3\,(p_{14} + 2\,p_{23})\,\lambda^4$$

$$= (a_0\,b_1) + 3\,\lambda\,(a_0\,b_2) + 3\,\lambda^2\,(a_0\,b_3) + \lambda^3\,(a_0\,b_4 - a_4\,b_0)$$

$$-(a_1\,b_3)\,\lambda^6 - 3\,(a_4\,b_2)\,\lambda^5 - 3\,(a_4\,b_1)\,\lambda^4$$

$$(23)\quad \begin{Bmatrix} p_{12}=p_{13}=p_{23}=0;\ p_{01}=a_0\,b_1,\ p_{02}=a_0\,b_2,\ p_{03}=a_0\,b_3, \\ p_{04}=a_0\,b_4-a_4\,b_0,\ p_{14}=-a_4 b_1,\ p_{24}=-a_4 b_2,\ p_{34}=-a_4 b_3. \end{Bmatrix}$$

Dies sind die erforderlichen Hülfsformeln. **Man schliesst** nun so.

Dass die Lage der sechs Wendepunkte keine ganz unabhängige sein kann, geht schon aus der Constantenanzahl ($=11$) der Curve R hervor. Man kann keine Curve R construiren, die in sechs beliebigen Punkten Wendepunkte hätte, da dies zwölf Bedingungen zählt.

Nehmen wir jetzt für den Augenblick an, die Wendepunkte *) $(\omega_1 \ldots \omega_6)$ lägen in der That auf einem Kegelschnitt, so wäre nach der zweiten Gleichung (21)

$$(24)\quad \tau_1^2 = (\omega_1 \ldots \omega_6)\,(\mu_7\,\mu_8) = \left(\frac{p_{01}}{p_{34}}\right)(\mu_7\,\mu_8) =$$

$$-\frac{a_0\,b_1}{a_4\,b_3};\ \text{also, da}\ -\frac{a_0}{a_4} = \tau_1.$$

$$(25)\quad \tau_1 = \frac{b_1}{b_3}\,(\mu_7\,\mu_8)\ \text{und demnach}$$

$$(26)\quad (\mu_7\,\mu_8) = -\frac{a_0\,b_3}{a_4\,b_1}.$$

---

d. h. zwischen den Coefficienten von

$$J \equiv i_0 + 6\,i_1\,\lambda + 15\,i_2\,\lambda^2 + \ldots + 6\,i_5\,\lambda + i_6\,\lambda^6$$

finden die Relationen statt (cf. Brill Math. Ann. XX l. c.):

$$i_0 : 2\,i_1 : 5\,i_2 = -5 i_4 : -2\,i_5 : -i_6.$$

Umgekehrt befinden sich daher unter allen Substitutionen (20), d irgend eine binäre Form sechsten Grades in diese canonische For bringen, jedenfalls die $3.5 = 15$, die den Elementenpaaren $(\alpha_i\,\beta_i)$ d fünf zugehörigen Involutionen vierter Ordnung entsprechen.

*) Nach pg. 244 sind sie die Wurzeln der Funktionaldeterminante Schnittpunktformen:

$$J \equiv p_{01} + \ldots p_{34}\,\lambda^6.$$

Andrerseits war $Q \equiv (p_{03} - 3\,p_{12}) + \cdot + (p_{04} - 3\,p_{23})\,\lambda^2.$

Ist aber die Annahme richtig, so muss offenbar das vom Kegelschnitt ausgeschnittene Restpunktepaar von einer quadratischen Combinante der Schnittpunkttheorems-Involution dargestellt sein. Diese müsste durch die auf irgend einen der drei Doppelpunkte bezügliche Transformation (20) in eine solche Form übergehen, dass das Produkt ihrer Wurzeln den in (26) angegebenen Werth hat. Dies leistet aber nur die eine Combinante Q.

Nachdem man so auf die Form Q geführt ist, kehrt man den Beweis um und sagt:

„Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die sechs Wendepunkte (ω_i) mit dem Punktepaar Q auf einem Kegelschnitt liegen, sind zunächst durch die drei Gleichungen (18) gegeben, wenn man für sechs der acht λ die ω, und für die beiden Restargumente die Wurzeln von $Q = 0$ einsetzt.

Um leichter zu erkennen, ob die auf irgend einen Doppelpunkt $(\alpha_i\ \beta_i)$ bezügliche der Gleichungen 19) in der That in der vorgeschriebenen Weise erfüllt wird, wendet man die lineare Umformung (20) an, wodurch die gemeinte Gleichung die zweite Form (21) und das lineare Schnittpunkttheorem (die erste Form (21) oder) die Form (23) annimmt.

Dann aber zeigen die Formeln (24) (25) (26) die verlangte Erfüllung. Dasselbe Verfahren wende man auf die beiden andern Doppelpunkte an, dann ist der Beweis erledigt.“

Man sieht, dass ein wesentliches Hülfsmittel beim Beweise darin besteht, dass einmal von der Form (21), andrerseits von der Form (23) des Schnittpunkttheorems Gebrauch gemacht ist.

Fast in derselben Weise kann man den zweiten Brill'schen Satz beweisen:

δ_4) „Die sechs Restpunkte der Tangenten von R in den Doppelpunkten liegen mit dem

Restpunktepaar des Wendekegelschnitts auf einem Kegelschnitt."

Wie vorher, machen wir vermöge (20) einen der Doppelpunkte zu $(0, \infty)$.

Die Argumente der beiden andern seien dann $(A_k\ B_k)$, $(A_l\ B_l)$, und die bez. Produkte σ_k, σ_l.

Endlich die Restpunkte der Tangenten in ihnen seien resp. $(r_0\ r_\infty)$, (r_k, r_k'), (r_l, r_l').

Dann sind ihrer Definition nach zunächst die vier letzteren bestimmt durch:

(27) $\sigma_k A_k r_k = \tau_i,\ \sigma_k B_k r_k' = \tau_i,\ \sigma_l A_l r_l = \tau_i,\ \sigma_l B_l r_l' = \tau_i,$

also kommt durch Multiplikation:

$$(28)\ (\sigma_k\ \sigma_l)^3 (r_k\ r_k'\ r_l\ r_l') = \tau_i^4 : \text{da aber: } \tau_i = \sigma_k\ \sigma_l :$$

$$(28)\ r_k\ r_k'\ r_l\ r_l' = \tau_i.$$

Andrerseits ergeben sich r_0, r_∞ aus der zweiten Gleichung (23)

$$(29)\ r_0 = -\frac{b_1}{b_2},\ r_\infty = -\frac{b_2}{b_3} \text{ also } r_0\ r_\infty = \frac{b_1}{b_3}$$

Da endlich nach (25) $(\mu_7\ \mu_8)$ (das Produkt der Wurzeln von Q) gleich $\tau_i \frac{b_3}{b_2}$ ist, so folgt:

$$(30)\ (r_k\ r_k'\ r_l\ r_l')\ (r_0\ r_\infty)\ (\mu_7\ \mu_8) = (\tau_i) \left\{\frac{b_1}{b_3}\right\} \left\{\tau_i \frac{b_3}{b_1}\right\} = \tau_i^2.$$

q. e. d.

Die Formel (28) ist dabei zugleich der Beweis für den gleichfalls von Herrn Brill angegebenen Satz:

„Die vier Restpunkte zweier der drei Doppelpunktstangentenpaare liegen mit den beiden bez. Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt *)."

---

*) Diese Sätze lassen sich noch mannigfach erweitern, wie folgt: Gleichung (30) schreibt sich auch so:

175. Wir kehren zurück zu unserer Fläche zweiter Ordnung H (1).

Denkt man sich in (1) ein Argument α fest, die beiden andern beweglich, so stellt (1) einmal die mit dem Punkte α der Curve R_4^2 in gerader Linie liegenden Punktepaare, oder

---

$$(r_0\, r_\infty)\,(\mu_7\, \mu_8) = \tau_1 \text{ d. h.}$$

„**Die zwei Restpunkte eines Doppelpunktstangentenpaares liegen mit dem Punktepaar Q und den beiden andern Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt.**"

Stellt man weiterhin noch die Invariante j der Funktionaldeterminante der nach α genommenen ersten Polaren von $a_\lambda,\ b_\lambda$ auf, so ist dies eine Form j_α^6, die, $= 0$ gesetzt, diejenigen sechs Punkte einer Curve R darstellt, von denen harmonische Tangentenquadrupel an sie gehen. Verfährt man wie im Texte, so wird für das Schnittpunkttheorem (23):

$$j_\alpha^6 = \left\{-\frac{a_0\, b_3}{6}\right\}^3 + C_1\,\alpha + \ldots C_5\,\alpha^5 + \left\{\frac{a_4\, b_1}{6}\right\}^3 \alpha^6$$ und somit das Produkt ihrer Wurzeln

$$I = j_1\, j_2 \ldots j_6 = \tau_1^3 \left\{\frac{b_3}{b_1}\right\}^3 \text{ also wegen (29) } r_0\, r_\infty = \frac{b_1}{b_3}$$

Erstens $I\,(r_0\, r_\infty)^3 = \tau_1^3$.

Ferner bestimme man das Restpunktepaar, in dem die Gerade, die aus R das Paar Q ausschneidet, R noch trifft. Dieses sei $(\rho_1\,\rho_2)$. Dann ist wegen (26):

$$(\mu_7\, \mu_8)\,(\rho_1\, \rho_2) = \tau_1 \text{ mithin}$$

$$\rho_1\, \rho_2 = \frac{\tau_1}{\mu_7\, \mu_8} = \frac{b_1}{b_3} = r_0\, r_\infty.$$

Somit lautet die erweiterte Gleichung für die Punkte $(j_1 \ldots j_6)$:

$$I\,(r_0\, r_\infty)^3 = I\,(r_0\, r_\infty)^2\,(\rho_1\, \rho_2) = I\,(r_0\, r_\infty)\,(\rho_1\, \rho_2)^2 = I\,(\rho_1\, \rho_2)^3 = \tau_1^3.$$

Von den vier darin enthaltenen Sätzen werde etwa der letzte betont:

„**Durch die sechs Punkte I auf R (von denen harmonische Tangentenquadrupel an sie gehen) lege man eine Curve dritter Ordnung, die R ausserdem in einem der beiden Restpunkte der Geraden Q osculirt. Dann osculirt sie auch in dem andern.**" etc.

auch die die Gerade (α) der Fläche H treffenden Axen der cubischen Raumcurve, oder endlich den Kegelschnitt dar, den die Ebene (α) der Curve aus der Fläche H ausschneidet. Damit ist die projectivische Beziehung zwischen Gerade (α) und Ebene (α) näher bestimmt. Fallen die beiden variabeln Argumente zusammen, so ergiebt sich das vom Punkte α an die R_4^2 gehende Tangentenquadrupel, oder auch das die Gerade (α) von H treffende Tangentenquadrupel der Raumcurve oder die Schnittpunkte des Normkegelschnitts der Ebene (α) mit ihrem Schnittkegelschnitt auf H.

Nun trafen die beiden Ebenen ($Q = 0$) die Fläche H in einem Kegelschnitte, der sowohl H- als F-Kegelschnitt des bez. Normkegelschnitts ist: mithin ist nach einem früheren Satze das Schnittpunktquadrupel derselben aequianharmonisch, woraus mit Hülfe des eben Bemerkten wieder die Sätze (δ_1) (δ_2) fliessen.

176. Eine grosse Menge von weiteren Eigenschaften der Fläche H erhält man unmittelbar aus ihrer Abbildung auf die ebenen Curven R: es mögen etwa noch, im Hinblick auf die Doppel- *) und Wendetangenten der letztern, die folgenden angeführt werden:

ζ) „Die acht Tangenten, die eine Fläche zweiter Ordnung mit einer cubischen Raumcurve φ gemein hat, theilen sich für eine Fläche H in vier Paare (δ_i ε_i) derart, dass die vier Berührungssehnen der Fläche Axen der Curve sind (und zwar die Axen (δ_i ε_i)).

Die sechs Tangenten an die Fläche H in den Schnittpunkten mit der Curve treffen die Fläche

*) Mithin führen auch alle früher für die Argumentenpaare der Doppeltangenten (Wendetangenten) nachgewiesenen Beziehungen zu entsprechenden Sätzen für die Flächen H.

in sechs Restpunkten r. Von einem solchen geht immer noch eine einzige Curvenaxe aus, die dann zugleich Tangente der Fläche ist.“ etc.

177. In Früherem (cf. Nr. 133 ff.) wurde die Hurwitz'sche cubische Raumcurve $H_3 = H$ *) betrachtet, der Ort der Ecken von unendlich vielen der Curve φ umschriebenen Tetraedern, die auf φ eine biquadratische Involution bilden. Als letztere diene jetzt die der Schnittpunktformen der Curve R, dann existirt eine grosse Zahl von eigenthümlichen Beziehungen zwischen Fläche H und Curve H, von denen einige schon behandelt sind. So waren die Tangenten der Curve φ in ihren Schnittpunkten mit der Fläche H Sehnen der Curve H. (cf. pg. 210.)

Es möge genügen, hier noch eine wichtige Beziehung zwischen Fläche und Curve H herauszugreifen, die von den Doppelpunkten $(\alpha_1 \beta_1)$ (resp. den auf der Fläche H liegenden Axen $(\alpha_1 \beta_1)$ der Curve φ) ausgeht.

Unter den Involutionsquadrupeln befinden sich nemlich drei von der Form:

$$(31) \quad (\lambda-\alpha_1)^4 + k\,(\lambda-\beta_1)^4.$$

Fassen wir hier für den Augenblick k als variabel auf, so tritt uns eine neue Involution vierter Ordnung, aber specieller Natur, entgegen.

Denn ihre Doppelelemente sind gegeben durch (cf. Nr. 65):

$$(32) \quad (\lambda-\alpha)^3\,(\lambda-\beta)^3 = 0.$$

Aus dem Umstande, dass es zwei Tetraeder dieser Involution giebt, deren Ebenen alle coincidirt sind (in die Ebenen (α_1) resp. (β_1)) folgt sofort, dass die durch die Involution (31)

*) Nach der jetzigen Bezeichnungsweise hätte man zu sagen:
„Jede Ebene der Curve φ trifft die Curve H in den Ecken eines ihrem Normkegelschnitt umbeschriebenen Dreiseits.“

bestimmte specielle Curve H_3 mit der Curve φ die Punkte, Tangenten und Ebenen (α_i) (β_i) gemein hat.

Somit gilt der Satz:

η) „Unter den einer Curve H_3 ein- und einer Curve φ umbeschriebenen Tetraedern befindet sich drei ausgezeichnete. Jedes derselben ist einer weiteren speciellen Curve $H_3^{(i)}$ einbeschrieben, die mit der Curve φ zwei *Punkte, Tangenten*, *Ebenen* (α_i, β_i) gemein hat.

Die drei Axen $(\alpha_i \beta_i)$ bestimmen dann nach Satz (β_2 pg. 274) eindeutig die zur Curve H_3 gehörige Fläche H_2, die φ in den sechs Punkten trifft, deren Tangenten Sehnen von H_3 sind.

Umgekehrt gelangt man so von der Fläche H_2 zur Curve H_3."

Dieser Satz ist aber nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Beziehung zwischen Fläche und Curve H, die selbst wieder einer weittragenden Verallgemeinerung (die in Kap. III behandelt ist) fähig ist. Diese gemeinte Beziehung ist (zunächst) in algebraischer Gestalt:

$\varkappa$) I. „Jedes der R_4^2-Gruppe:

$$(33) \quad u_0 \varphi_0 + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2$$

angehörige Elemententripel (α, β, γ) entspricht einer bestimmten Form

$$(34) \quad a(\lambda-\alpha)^4 + b(\lambda-\beta)^4 + c(\lambda-\gamma)^4$$

der zu (33) conjugirten Gruppe

$$(35) \quad a_\lambda + kb_\lambda, \text{ und umgekehrt.}$$

II. Jedes der Gruppe (35) angehörige Elementenpaar $(\alpha_1 \beta_1)$ entspricht einer bestimmten („harmonischen") Form:

$$(36)\quad (\lambda-\alpha_1)^4 + k_1\,(\lambda-\beta_1)^4$$

der zu (35) conjugirten Gruppe (33), *und umgekehrt.*"

Der Beweis fliesst unmittelbar aus den früher (mit Hülfe ihrer conjugirten Gruppe) behandelten Sätzen über eine biquadratische Form f, die wir jetzt in folgenden zusammenziehen:

„Soll die Form f als Summe von zwei resp. drei Biquadraten linearer Formen $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$ (resp. $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$, $\lambda-\gamma$) darstellbar sein, so müssen die ersten (resp. zweiten) nach den zwei resp. drei Elementen α, β (γ) polarisirten Differentialquotienten von f [in Zeichen „F_{11}, F_{12}, F_{22} resp. F_1, F_2"] verschwinden und umg."

Dann erledigt sich zunächst Fall I, wie folgt. (Statt φ_0 φ_1 φ_2 schreiben wir momentan φ, χ, ψ.)

Soll (α, β, γ) ein Tripel der Gruppe (33) sein, so genügt es ihrem Schnittpunkttheorem

$$(37)\quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

das wiederum zwei Gleichungen der Form:

$$(38)\quad \begin{cases} A_1 + \mu\,B_1 = 0 \\ A_2 + \mu\,B_2 = 0 \end{cases}$$

aequivalent ist. Jedem Tripel α, β, γ der verlangten Art gehört dann ein einziger Werth μ zu und umg.

Die Bedingungen (38) sagen aber gerade aus, dass die Form

$$(39)\quad a_\lambda + \mu\,b_\lambda$$

in der Gestalt (34) (mittelst der α, β, γ) darstellbar ist.

Damit ist Fall I bewiesen, und da man den Gang genau rückwärts machen kann, auch die Umkehrung.

Ganz ähnlich Fall II. Beweisen wir hier z. B. die Umkehrung zuerst.

Greifen wir irgend ein harmonisches Quadrupel der Gruppe (33) heraus, so ist dies darstellbar durch (36):

(36) $K_1 \equiv (\lambda-\alpha_1)^4 + k^1 (\lambda-\beta_1)^4 \equiv v_0 \varphi + v_1 \chi + v_2 \psi$.

Dann aber genügen $(\alpha_1 \beta_1)$ den Bedingungen (40)

$$\begin{cases} v_0 \Phi_{11} + v_1 X_{11} + v_2 \Psi_{11} = 0 \\ v_0 \Phi_{12} + v_1 X_{12} + v_2 \Psi_{12} = 0 \\ v_0 \Phi_{22} + v_1 X_{22} + v_2 \Psi_{22} = 0 \end{cases} \text{d. h. der einen} \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \\ X_{11} & X_{12} & X_{22} \\ \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{22} \end{vmatrix} =$$

Dies ist genau die Bedingung, dass $(\alpha_1 \beta_1)$ ein Elemente-paar der Involution (35) ist.

Und umgekehrt wie bei Fall I.

q. e. d.

178. Fassen wir jetzt Fall II. noch näher in's Auge.

Soll eine Form (33) ein harmonisches Quadrupel darstellen, so muss, anders ausgedrückt, ihre Invariante j verschwinden:

$$(41) \quad j\,(u_0 \varphi_0 + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) = 0 \equiv K_3$$

d. h. die solche Quadrupel aus der Curve R $(\rho x_1 = \varphi_i)$ ausschneidenden Geraden umhüllen eine Curve dritter Klasse *) K_3 (deren mit R gemeinsame 18 Tangenten bekanntlich die 6 Wendetangenten von R, dreifach gezählt, sind).

Andrerseits durchlaufen die Punkte σ (wo die σ aus α_1, β_1 gebildet sind) in der Ebene eines Normkegelschnitts und auf diesen bezogen, eine Curve dritter Ordnung H_3 (vom Geschlecht 1), deren Punkten nach Früherem ein- eindeutig diejenigen Sehnen der Raumcurve H_3 entsprechen, die zugleich Axen der Norm- (Grund-) Curve φ sind. Dann sagt Satz $\varkappa$) II jetzt aus:

λ) „Die Curven K_3 und H_3 sind ein-eindeutig aufeinander bezogen: und zwar stellt irgende in

---

*) Diese sechs Wendetangenten von R sind dann bekanntlich auch die gemeinsamen Tangenten von K_3 und demjenigen Kegelschnitt K_2, dessen Tangenten aus R aequianharmonische Quadrupel ausschneiden, und dessen Gleichung $i\,(u_0 \varphi_0 + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) = 0$ ist.

Quadrupel der Involution (35) einmal die Gegenecken eines bestimmten Hesse-Steiner'schen *) Vierseits der Curve H_3, andrerseits die Gegenseiten eines bestimmten Hesse-Steiner'schen Vierecks der Curve K_3 dar."

179. Ehe man die beiden Sätze $\varkappa$) in der Weise des Satzes η) auf die Curven und Flächen H überträgt, wird es nöthig sein, sich über die Natur der speciellen Gruppen (34) (36) (resp. ihrer H-Bilder) näher zu informiren. Von der H-Curve (36) ist eine Eigenschaft bereits im Satze η) niedergelegt und früher wurde nachgewiesen, dass es nur noch eine Involution giebt:

$$(42)\ (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\beta_1)\{(\lambda-\alpha_1)^2+k(\lambda-\beta_1)^2\}$$

die mit (36) dieselben Doppelelemente (der Form (32)) gemein hat.

Wir schreiben statt α, β, γ, resp. α_1, β_1 lieber **) $y_1\ y_2\ y_3$ resp. $y_1\ y_2$.

Dann ist zunächst leicht zu sehen, wie man von der Gruppe (34) zu (36) gelangt und umg. Denn die dreigliedrige Gruppe (34) enthält drei Involutionen der Form (36): umgekehrt ist eine Involution (36) noch in einer ∞^2-Schaar von Gruppen (33) enthalten:

$$(43)\ (\lambda-y_1)^4+k_1(\lambda-y_2)^4+k_2\,\varphi(\lambda):$$

μ_1) „Das Netz von Flächen zweiter Ordnung, die durch die zur speciellen Involution (36) gehörige Hurwitz'sche Curve (H_3^{12}) gehen, besteht aus

*) D. h. ein solches, dessen Gegenecken sich in der Hesse-Steiner-chen Correspondenz auf der Curve H_3 entsprechen.

**) Um keine Verwechslung mit den Doppelpunktsargumenten ($\alpha_1\ \beta_1$) fkommen zu lassen. Aus analogem Grunde wird die cubische Covariante er cubischen Form f an dieser Stelle Θ (und nicht, wie üblich Q) gennt.

den zu allen *) Gruppen (43) gehörigen Flächen(H_2^{12}). Die entsprechenden ebenen R-Curven besitzen alle zwei Undulationen ($y_1\, y_2$).“

Unter diesen Gruppen (43) befindet sich insbesondere eine ∞^1-Schaar

$$(44)\quad (\lambda - y_1)^4 + k_1 (\lambda - y_2)^4 + k_2 (\lambda - y_3)^4$$

d. s. aber wieder die unter (34) angegebenen. Diese mögen zuerst erledigt werden.

Die entsprechenden ebenen R-Curven besitzen drei Undulationen, deren Tangenten je zwei Wendetangenten und eine Doppeltangente absorbirt haben.

Welches sind die Argumente der einen eigentlichen Doppeltangente, sowie der Doppelpunkte; welches die Combinante Q?

Wir bringen zu dem Zweck die cubische Form, deren Wurzeln y_1, y_2, y_3 sind, in die canonische Form:

$$(45)\ f \equiv \lambda^3 - \mu^3.$$

Dann verschwinden im Schnittpunkttheorem von (44)

$$(46)\quad a_s = 0,\ b_s = 0$$

alle Coefficienten, ausser:

$$(47)\quad a_0 = 1,\ a_3 = -\frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{4},\ b_4 = -1\ ^{**})$$

---

*) Nimmt man $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$, so gewinnt die Gleichung der H_2-Fläche (43) die einfache Gestalt:

$$p_{12}(s_0 s_2 - s_1^2) + p_{13}(s_0 s_3 - s_1 s_2) + p_{23}(s_1 s_3 - s_2^2) = 0.$$

Dies ist aber gerade, wie sich weiter unten ergiebt, die Gleichung des gemeinten Netzes.

**) Dann wird die Gleichung der H_2-Fläche (44) nach leichter Rechnung folgende:

$$(s_0 - s_3)^2 - \frac{1}{4}\{9\, s_0 s_3 - s_1 s_2\} = 0.$$

Dabei ist $s_0 - s_3 = 0$ die Ebene, die aus der Grundcurve φ das

mithin ist $(0, \infty)$ die eigentliche Doppeltangente und

$$(48)\quad Q \ldots -\frac{9}{8}\lambda\mu = \frac{9}{2.8}\Delta$$

wo Δ die quadratische Covariante von f ist.

Die Argumente der Doppelpunkte findet man, wie im allgemeinen für eine Gruppe (33), so. Es giebt in der zu (44) conjugirten Gruppe (Involution) drei harmonische Quadrupel. Man sucht für jedes derselben das zu den beiden (zu einander harmonischen) Paaren, in die es sich zerlegt, zugleich harmonische Paar.

Nun enthält diese Involution die Form f (45) als festen Faktor:

$$(49)\quad a_\lambda + kb_\lambda \equiv f(\lambda - y).$$

Dann aber ist bekanntlich die Invariante j dieser Form (als Form der Variabeln y) die cubische Covariante Θ von f.

$$(50)\quad \Theta \equiv y^3 + 1.$$

Schreiben wir wieder λ statt y und stellen in der angegebenen Weise die drei gesuchten Paare auf, so liefert ihr Produkt:

(51) $\lambda^6 + \mu^6 \equiv -\frac{1}{2}\{R f^2 - 2\,\Theta^2\}$ wo R die Discriminante von f ist.

Da aber, wie man weiss, zwischen f und ihren Covarianten die Beziehung herrscht:

$$(52)\quad \Delta^3 \equiv -\{2\,\Theta^2 + R f^2\}$$

so hat man, wenn man die Wurzeln von Θ mit $y_1' \, y_2' \, y_3'$ bezeichnet:

Tripel f (45) ausschneidet und $9\, s_0\, s_3 - s_1\, s_2 = 0$ diejenige Fläche des „Netzes" φ, die die beiden Tangenten 0, ∞ enthält. Daraus folgt:

„Die H_2-Fläche (44), wo die y die Wurzeln der Form f seien, berührt diejenige Fläche des „Netzes φ", die die beiden Tangenten $\Delta = 0$ enthält, längs eines Kegelschnitts, dessen Ebene aus φ das Punktetripel $f = 0$ ausschneidet."

μ_2) „Die Argumente der Doppelpunkte der R_4^2:

$$\rho x_i = (\lambda - y_i)^4$$

erhält man, wenn man immer das zu $(y_i\, y_k)\,(y_l\, y'_l)$*) harmonische Paar aufsucht. Das Produkt der drei so gefundenen Paare liefert das zu Δ^3, in Bezug auf das Paar (f^2, Θ^2), vierte harmonische Sextupel.

Die Wurzeln von Δ sind Wurzeln der Combinante Q und sind die Argumente der einen eigentlichen Doppeltangente."

180. Die entsprechende H_2-Fläche, sie sei H_2^{123}, berührt die cubische Grundcurve φ dreimal (in y_i). Solcher Flächen H_2 giebt es aber nach Satz pg. 83 fünf; wodurch ist die unsrige ausgezeichnet? Diese Frage erledigt sich leicht mittelst des früher Nr. 155 angegebenen Verfahrens.

Die R-Curve besitzt drei Undulationstangenten (y_i). Nimmt man diese als Fundamentallinien einer quadratischen Klassentransformation T, so geht die Curve über in eine mit drei Spitzen (y_i). Ausserdem wende man noch die drei Transformationen T an, deren Fundamentallinien sich aus zwei der Undulationstangenten und der einen Doppeltangente zusammensetzen. Vermöge ihrer geht die R-Curve über in drei andere mit zwei Spitzen $(y_i\, y_k)$ und einer Undulation (y_l).

Dies sind dann alle fünf Typen, für die das Wendepunktssextupel durch f^2 dargestellt ist.

Beiläufig sieht man daraus, dass es keine R-Curve mit einer Spitze und zwei Undulationen giebt:

Für die H_2-Fläche H_2^{123} folgt somit:

μ_3) „Die einer Gruppe (44) zugehörige Fläche

*) Diese beiden Paare sind bekanntlich bei passender Anordnung der Wurzeln von Θ, für $l = 1, 2, 3$ zu einander harmonisch, wie hier erforderlich.

H_2^{123} ist die einzige der fünf die Grundcurve φ an den Stellen (y_i) berührenden H_2-Flächen, auf der keine der Tangenten (y_i) liegt."

Der Satz (μ_2) sagt, mit Rücksicht auf die früher (Nr. 34, 35) erörterte Construction der Covarianten Δ und Θ auf φ und mit Bezug auf Nr. 32, für unsere Fläche H_2^{123} Folgendes aus:

Man lege zuvörderst die drei Flächen des „Netzes φ", die je zwei Tangenten $(y_i\ y_k)$ enthalten. Dann geht vom dritten Punkt (y_l) immer eine Sehne $(y_l\ y'_l)$ aus, die ganz auf der bez. Fläche liegt.

Des Weiteren lege man die drei Flächen des „Netzes φ", die die Sehnen $(y_i\ y_k)$ $(y_l\ y'_l)$ ganz enthalten; sie enthalten je ein Tangentenpaar $(\alpha_l\ \beta_l)$ der Curve φ.

Dann bildet die Regelschaar der drei Axen $(\alpha_l\ \beta_l)$ unsere Fläche H_2^{123}.

Die drei Sehnen $(y_l\ y'_l)$ liegen auf einer einzigen Fläche des „Netzes φ": diese enthält die Tangenten $\Delta = 0$. Diese Tangenten berühren auch unsere Fläche H_2^{123}: die Berührungssehne ist die Curvenaxe Δ. etc.

181. In ähnlicher Weise theilen wir noch einige Eigenschaften der H_3-Curve (36) mit. Solcher cubischer Curven, die mit der Grundcurve φ die beiden Punkte, Ebenen, Tangenten $(0, \infty)$ gemein haben, giebt es noch eine ∞^2-Schaar:

(53) $\rho s_0 = k_0\, \mu^3,\ \rho s_1 = 3\, k_1\, \mu^2\, \lambda,\ \rho s_2 = 3\, k_2\, \mu\, \lambda^2,\ \rho s_3 = k_3\, \lambda^3.$

In der That zählt man leicht die zehn Bedingungen ab, die die gewünschte Lage für eine cubische Curve (die von 12 Constanten abhängt) erfordert.

Aber auch die Form (53) ist evident, denn nach Voraussetzung muss die rechte Seite von s_0 den Faktor μ dreimal, die von s_1 den Faktor μ zweimal, λ einmal enthalten etc.

Will man sich überzeugen, dass die 4 homogenen Grössen k in der That nur zwei *) unabhängige repräsentiren, so stelle man das Flächennetz der Curve (53) auf:

$$(54)\ \nu_0\left(3\,s_0\,s_2 - \frac{k_0\,k_2}{k_1^2}\,s_1^2\right) + \nu_1\left(9\,s_0\,s_3 - \frac{k_0\,k_3}{k_1\,k_2}\,s_1\,s_2\right)$$

$$+\ \nu_2\left(3\,s_1\,s_3 - \frac{k_1\,k_3}{k_2^2}\,s_2^2\right) = 0 = \nu_0\,\Phi_0 + \nu_1\,\Phi_1 + \nu_2\,\Phi_2.$$

Dann sind die Parameter der drei constituirenden Flächen Φ durch die Relation verbunden:

$$(55)\ \left\{\frac{k_0\,k_2}{k_1^2}\right\}\left\{\frac{k_1\,k_3}{k_2^2}\right\} - \left\{\frac{k_0\,k_3}{k_1\,k_2}\right\} = 0.$$

q. e. d.

Stellt man andrerseits die zur Involution

$$(56)\ \lambda^4 + \varkappa\,\mu^4 = 0$$

gehörige H_3-Curve auf (mittelst des Schnittpunkttheorems von [illegible] (56)), so ergiebt sich ohne Mühe:

$$(57)\ \rho s_0 = \mu^3,\quad \rho s_1 = -\mu^2\lambda,\quad \rho s_2 = \mu\lambda^2,\quad \rho s_3 = -\lambda^3,$$

deren Flächennetz somit ist:

$$(58)\ \pi_0\,(s_0\,s_2 - s_1^2) + \pi_1\,(s_0\,s_3 - s_1\,s_2) + \pi_2\,(s_1\,s_3 - s_2^2) = [illegible]$$

Unter den Flächen dieses Netzes befindet sich eine aus[illegible] gezeichnete:

(59) $s_0\,s_3 - s_1\,s_2 = 0$ oder in Ebenencoordinaten:

(60) $u_0\,u_3 - u_1\,u_2 = 0.$

Denn diese ist die einzige der Flächen (58), die zuglei[illegible]h der Grundcurve φ umbeschrieben ist. Andrerseits ist dies [illegible]ie der Gruppe:

$$(61)\ \lambda^4 + \varkappa_1\,\mu^4 + \varkappa_2\,\lambda^2\,\mu^2$$

zugehörige H_2-Fläche (cf. Satz μ_1), denn dann verschwinden

*) Darauf war schon in der anm. pg. 44 hingewiesen. Den allgemeinen Satz (cf. l. c.) beweist man ganz wie oben.

in der pg. 296 anm. angegebenen Gleichung a_2, b_2 und damit p_{12} und p_{23}, wodurch sie in (59) übergeht.

Also hat man zunächst:

μ_3) „Der zur speziellen Involution

$$(\lambda - y_1)^4 + \varkappa (\lambda - y_2)^4$$

zugehörigen H_3-Curve H_3^{12} ist eine ausgezeichnete Fläche zweiter Ordnung (59, 60) einbeschrieben, die zugleich der Grundcurve φ umbeschrieben ist, und die Tangenten (y_1, y_2) enthält*). Diese entspricht der Gruppe (61) d. h. setzt man aus irgend zwei zu (y_1, y_2) harmonischen Paaren ein Quadrupel zusammen, so liefert dies ein der Fläche (59) ein- und φ umschriebenes Tetraeder."

182. Diese Fläche erfreut sich noch einer weiteren interessanten Eigenschaft.

Es giebt noch eine ∞^1-Schaar von Curven (53), die auf ihr liegen: diese ist, wie die Vergleichung von (59) mit (54) lehrt, durch die Bedingung festgelegt:

$$(62)\quad 9\, k_1 k_2 - k_0 k_3 = 0.$$

Jede dieser Curven besitzt unendlich viele Sehnen, die zugleich Axen von φ sind, ohne eine H_3-Curve zu sein (vgl. dagegen für den allgemeinen Fall Nr. 133).

Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass wenn eine Curve (53) auch nur eine der auf der Fläche (59) liegenden Axen von φ einmal trifft, sie zu der durch (62) bestimmten Schaar gehört.

*) Und reciprok natürlich in demselben Sinne der Curve H_3^{12} die ausgezeichnete Fläche

$$9 s_0 s_3 - s_1 s_2 = 0 \text{ oder: } u_0 u_3 - 9 u_1 u_2 = 0$$

um- und der Curve φ einbeschrieben.

Denn irgend zwei Ebenen von $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ treffen eine Curve (53) in den Tripeln:

$$(63)\quad \begin{cases} k_0\,\lambda_1^3 - 3\,k_1\,\lambda_1^2\,\lambda + 3\,k_2\,\lambda_1\,\lambda^2 - k_3\,\lambda^3 = 0 \\ k_0\,\lambda_2^3 - 3\,k_1\,\lambda_2^2\,\lambda + 3\,k_2\,\lambda_2\,\lambda^2 - k_3\,\lambda^3 = 0. \end{cases}$$

Soll nun die Axe $(\lambda_1\,\lambda_2)$ auf der Fläche (60) liegen, so ist $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ d. h. $\lambda_1 = -\lambda_2 = x$ und (63) geht über in:

$$(64)\quad \begin{cases} k_0\,x^3 - 3\,k_1\,x^2\lambda + 3\,k_2\,x\lambda^2 - k_3\,\lambda^3 = 0 \\ k_0\,x^3 + 3\,k_1\,x^2\lambda + 3\,k_2\,x\lambda^2 + k_3\,\lambda^3 = 0. \end{cases}$$

Daher haben die Wurzeln der ersten Gleichung die negativen Werthe von denen der zweiten. Haben somit für irgend einen Werth von x beide Gleichungen eine Wurzel gemein, so auch eine zweite.

Die Bézout'sche Resultante (cf. Nr. 12) wird in diesem Falle:

$$(65)\quad -8\,k_0\,k_3\,x^9\,(k_0\,k_3 - 9\,k_1\,k_2)^2.$$

Das Verschwinden der ersten drei Faktoren (statt x^9 würde es homogen heissen: $x^9\,x'^9$) bedeutet nur, dass alle Curven (53) mit (57) die beiden Tangenten 0, ∞ gemein haben; das des letzten Faktors beweist die aufgestellte Behauptung.

183. Es erübrigt noch zu zeigen, dass unter allen Curven (53) die in Rede stehende (57) in der That die einzige H_3-Curve ist. Aber dies ist evident: denn da jede Curve (53) mit unserer H_3-Curve die Ebenen, Tangenten und Punkte (0, ∞) gemein hat, so folgt aus der bekannten Beziehung zwischen φ und einer H_3-Curve, dass für eine zweite H_3-Curve jedenfalls das Element 0 mit dem dreifachen Elemente 0 und das Element ∞ mit dem dreifachen Elemente ∞ zwei Quadrupel der zugehörigen Involution bildet. Dies ist aber nur die Involution (56).

Und da jedes Quadrupel (56) sich in zwei zu einander

harmonische Paare zerlegt, die beide zum Paar 0, ∞ harmonisch sind, so folgt:

μ_5) „Unter allen Curven des Systems (53) ist die Curve H_3^{12} die einzige H_3-Curve, während es noch eine ∞^1-Schaar des Systems giebt, die unendlich viele Sehnen besitzen, die zugleich Axen von φ sind, und die alle mit H_3^{12} auf der Fläche (59) liegen. Auf dieser lassen sich die Geraden der einen Schaar, der die Tangenten (0, ∞) von φ angehören, in Paaren einer (gewöhnlichen) Involution anordnen, deren Doppelelemente jene Tangenten sind.

Jedes dieser Paare bildet zwei Gegenkanten eines φ um- und H_3^{12} einbeschriebenen Tetraeders, und umgekehrt besitzt ein jedes solches Tetraeder ein Paar Gegenkanten, das auf der Fläche liegt und ein Paar der Involution bildet."

184. Irgend eine Grundcurve φ und eine H_3-Curve sind projektivisch aufeinander bezogen. Denn jedem Punkte von H_3 entspricht die eine Ebene von φ, die Gegenebene des von ihm ausgehenden, H_3 ein- und φ umbeschriebenen Tetraeders ist und umgekehrt.

μ_6) „Für die canonische Gleichungsform (57) von H_3^{12} ist diese projektivische Beziehung zwischen H_3^{12} und φ einfach durch

$$(66)\quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

ausgedrückt."

In der That, durch die angegebene Substitution entsprechen sich zunächst Punkt 0 (∞) von H_3 und Ebene 0 (∞) von φ. Würde noch etwa dem Punkt 1 von H_3^{12} auch die

Ebene 1 von φ entsprechen, so kann die projektivische Beziehung zwischen beiden Curven nur die Form (66) haben.

Nun bildet das Argument $\lambda = 1$, mit dem Tripel (— 1, $+ i$) ein Quadrupel der Involution (56). Vom Punkte 1 auf H_3^{12} geht aber an φ das Ebenentripel:

$$(67)\quad \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)$$

mithin ist 1 die Gegenebene (auf φ) des vom Punkte 1 (auf H_3^{12}) ausgehenden Tetraeders *).

q. e. d.

184. Nach diesen Erörterungen über die Curven H_3^{12} und Flächen H_2^{123} und ihren Zusammenhang können wir die Sätze *k*) geometrisch so aussprechen:

v) „Man denke sich auf einer cubischen Raumcurve φ, deren Ebenen man als Elemente auffasst, eine biquadratische Involution nebst ihrer conjugirten (dreigliedrigen) Gruppe gegeben.

Dann sind die Quadrupel der Involution dargestellt durch ∞^1 φ um- und einer Hurwitz'schen Curve H_3 ein-; desgleichen die Quadrupel der conjugirten Gruppe durch ∞^2 φ um- und einer Fläche H_2 einbeschriebene Tetraeder.

Jede Kante eines der ersteren Tetraeder ist zugleich Axe von φ und Sehne von H_3 und repräsentirt ein Elementenpaar $(x_1\, x_2)$ der Involution.

*) Denkt man sich also auf der Curve H_3^{12} die Substitution (66) ausgeführt, so geht ihre Gleichung (wenn man wieder λ für λ' setzt) über in:

$$\rho s_0 = \lambda^3,\ \rho s_1 = -\lambda^2,\ \rho s_2 = \lambda,\ \rho s_3 = -1.$$

Die Curve H_3^{12} ist also in Bezug auf das Normtetraeder (0, ∞) (cf. Nr. 3.) zur Curve φ vollkommen dualistisch. Zugleich bedingt die projektivische Beziehung beider Curven ($\lambda = \lambda$) eine räumliche reciproke Verwandtschaft, in der jedem Punkt $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$ die Ebene $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$ entspricht.

Jeder Eckpunkt eines der letzteren Tetraeder, d. i. jeder Punkt der Fläche H_2 repräsentirt ein Elemententripel (y_1, y_2, y_3) der conjugirten Gruppe.

Dann trifft die durch ein Tripel (y_1, y_2, y_3) bestimmte spezielle Fläche H_2^{123} die Curve H_3 in sechs solchen Punkten, dass vier von ihnen die Ecken eines φ umbeschriebenen Tetraeders sind.

Und die durch ein Paar (x_1, x_2) bestimmte spezielle Curve H_3^{12} trifft die Fläche H_2 gleichfalls in sechs solchen Punkten."

Damit verlassen wir die biquadratische Involution als Repräsentantin des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung und beenden diesen Abschnitt und amit das zweite Capitel dieses Buches mit der vollständigen ösung der in den Hauptzügen schon behandelten Aufgabe ie Anzahl und Natur der biquadratischen Involutionen mit echs) gemeinsamen Doppelelementen resp. Elementenpaaren ergründen, sowie mit der Folgerung der wichtigen Sätze, sich daraus für die Theorie der cubischen Raumcurven erhaupt von selbst ergeben.

§. 29.

fünf Involutionen vierter Ordnung mit sechs gemeinsamen Doppelelementen.

185. In Nr. 156 wurde der Satz bewiesen:

„Ist (ε, η) das Argumentenpaar einer Doppeltangente r R_4^2, so nimmt ihr Wendepunktsextupel J (d. i. eine meine binäre Form sechsten Grades) durch die Subon:

) $\lambda' = k \frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda - \eta}$ (wo k gleich Eins angenommen werde)

eine Form an, in der die Coefficienten von λ'^5 und λ' verschwunden sind."

Mithin musste umgekehrt das Problem, die Doppeltangenten der R-Curven mit gemeinsamem Sextupel J (und damit auch das andere, die verschiedenen biquadratischen Involutionen mit gemeinsamer Funktionaldeterminante J) aufzustellen, in dem allgemeineren enthalten sein, die Substitutionen (1) zu finden, die eine binäre Form sechsten Grades in die angegebene Gestalt überführen.

Es fragt sich aber jetzt, ob umgekehrt jede dieser Substitutionen auf eine Doppeltangente einer R_4^2 mit den Wendepunkten J führt, oder ob es noch weitere Substitutionen giebt, die dieser Frage fremd sind. Dies soll vorerst erledigt werden.

War das Schnittpunkttheorem einer R_4^2:

$$(2)\quad a_s = 0, \quad b_s = 0,$$

also die Involution der Schnittpunktformen:

$$(3)\quad a_\lambda + k\, b_\lambda = 0$$

so war das Sextupel der Wendepunkte der Curve (2) (der Doppelelemente der Involution (3)):

$$(4)\quad J \equiv p_{01}\,\mu^6 + 3\,p_{02}\,\mu^5\lambda + \ldots + 3\,p_{24}\,\mu\lambda^5 + p_{34}\,\lambda^6 = 0.$$

Wir denken uns die Substitution (1), wo ε, η einer Doppeltangente der Curve (2) angehören, ausgeführt und dann wieder λ (homogen λ, μ) statt λ' geschrieben.

Dann verschwinden a_2, b_2, und somit

$$(5)\quad p_{02} = 0, \quad p_{24} = 0.$$

Gehen wir umgekehrt von diesen Bedingungen aus, so verfahren wir wie in Nr. 66.

Die Gleichungen (5) haben entweder zur Folge, dass:

(6a) $a_2 = b_2 = 0$ und damit auch $p_{21} = p_{23} = 0$, oder dass:

(6b) $p_{04} = 0$.

Im ersten Falle ist in der That (ε, η) eine Doppeltangente

der Curve (2), von der wir ausgingen, im zweiten scheint eine fremde Lösung vorzuliegen. Welche?

Die Gleichungen (5) (6b) sind ersetzbar durch:

(7) $a_0 + k'b_0 = 0, \; a_2 + k'b_2 = 0, a_4 + k'b_4 = 0$

wo k' einen bestimmten, wenn auch noch unbekannten Faktor vorstellt. Dann hat das Quadrupel $a_\lambda + k'b_\lambda$ die Form:

$$(8) \quad a_\lambda + k'b_\lambda \equiv \lambda\mu\,(\lambda^2 + k''\,\mu^2) = 0.$$

(Denken wir uns für den Moment k'' variabel, so stellte (8) genau diejenige (einzige) Involution dar, die mit $\lambda^4 + m\mu^4$ die gleichen Doppelelemente (λ^3, μ^3 d. h. 0^3, ∞^3) gemein hat.) Mithin ist ($\varepsilon\,\eta$) in diesem Fall ein Paar, das mit einem zu ihm harmonischen ein Quadrupel der Involution (3) bildet. Nach Früherem giebt es drei Quadrupel der Involution (3), die aus zwei solchen Paaren bestehen; das zu beiden Paaren zugleich harmonische ergiebt jedesmal einen Doppelpunkt ($\alpha_1 \beta_1$) der Curve (2).

Demnach giebt es, wenn man von der Curve (2) ausgeht, einmal 4 Werthepaare $\varepsilon_1\,\eta_1$ erster Art (den Doppeltangenten zugehörig), die die vorgelegte Aufgabe (der canonischen Form von 7) lösen: dann aber noch 3 . 2 = 6 weitere Paare zweiter Art $\varepsilon_2\,\eta_2$, die drei harmonische Quadrupel der Involution (3) bilden. Diese 6 Paare stehen aber nach Nr. 152 in sehr einfachem Zusammenhang.

Wurde nemlich die Involution (3) auf einem Kegelschnitt φ durch ein φ stützendes Kegelschnittbüschel D ausgeschnitten, sodass die Grundpunkte des letzteren ein Polviereck von φ bildeten, so repräsentirten auf φ bezogen diese 4 Eckpunkte die 4 Werthepaare ($\varepsilon_1\,\eta_1$) erster Art und die 3 . 2 Seitenpaare des Vierecks die 3 . 2 Paare zweiter Art d. h. diese sechs letzteren Paare ($\varepsilon_2\,\eta_2$) sind die Funktionaldeterminanten der vier ersteren. (Die Doppelpunkte der Curve (2) waren dann durch die Ecken

des Polardreiecks des Büschels vorgestellt.) Diese 10 Paare bildeten einen Cyclus von fünf Quadrupeln (indem jedes Element ε doppelt auftrat), so dass jedes dieser Quadrupel mit dem Restsextupel in der oben angegebenen Weise je einer der fünf R-Curven angehören, aus der die vier übrigen durch vier Klassentransformationen T_1 hervorgingen, deren Fundamentallinien je drei der vier Doppeltangenten waren.

Legt man die Schaar von Kegelschnitten, die dem Doppeltangentenvierseit einbeschrieben sind, so hat diese mit der vorliegenden R-Curve die zu ihr gehörige (Tangenten-) Involution (3) gemein. Die 3.2 Tangentenpaare von den Gegenecken des Vierseits an die Curve bilden die 3.2 Paare ε, η der zweiten Art ($\varepsilon_2\, \eta_2$).

Betrachtet man eines dieser sechs Paare zweiter Art als die Doppelelemente einer (gewöhnlichen) Involution auf der R-Curve, so umhüllen die Geraden, die die Punktepaare der Involution aus R ausschneiden, nach Nr. 165 eine rationale Curve dritter Classe, deren eine Doppeltangente gerade die beiden Punktepaare der Involution ausschneidet, die auf gerader Linie liegen. So gelangt man zu 6 rationalen Curven dritter Classe, deren 6 Doppeltangenten somit gerade die 6 Quadrupel ausschneiden, die sich in zwei zu einander harmonische Paare zerlegen, so dass das zu ihnen zugleich harmonische Paar ein Paar ($\varepsilon\, \eta$) der zweiten Art ist. Nennen wir diese die 6 Doppeltangenten ($\varepsilon_2\, \eta_2$), so haben wir, alles zusammengefasst, Folgendes:

α) „Es giebt mindestens *einen* Cyclus von zehn Substitutionen (1), die eine allgemeine binäre Form sechsten Grades in die canonische Form (5) überführen. Die zugehörigen Werthepaare ($\varepsilon_i\, \eta_i$) bilden *in der That* (doppelt gezählt) die 5 Doppeltangentenquadrupel von fünf durch den Transformationsprocess T_1 cyclisch verbundenen

Curven R mit demselben (gegebenen) Wendepunktssextupel.

Für jede einzelne der fünf Curven R zerlegen sich die 10 Paare $(\varepsilon\ \eta)$ in vier erster Art $(\varepsilon_1\ \eta_1)$ {die Doppeltangenten(argumenten)paare} und sechs zweiter Art $(\varepsilon_2\ \eta_2)$, die 3.2 Tangentenpaare, die von den Gegenecken des Doppeltangentenvierseits an die Curve gehen.

Diese sechs Paare zweiter Art bilden zugleich die Lösung der Aufgabe, „für die vorliegende Curve R die Argumente der Doppelpunkte zu finden". Man erhält sie, wenn man die zu den drei „Paarpaaren" harmonischen Paare sucht.

Fasst man die sechs Paare zweiter Art $(\varepsilon_2\ \eta_2)$, jedes als die Doppelelemente einer Involution zweiter Ordnung auf, so giebt es für jede *eine* Gerade der Ebene, die zwei Punktepaare der Involution aus R ausschneidet. Diese sechs Geraden {die Doppeltangenten $(\varepsilon_2\ \eta_2)$ von sechs bestimmten Curven dritter Klasse} umhüllen nebst den sechs Wendetangenten eine bestimmte Curve dritter Klasse, deren Tangenten aus R die harmonischen Quadrupel ausschneiden."

186. Dass es aber in Wirklichkeit nur einen solchen Substitutionencyclus (1) giebt, lässt sich z. B. (abgesehen von weiteren Bestätigungen) mittelst einer direkten Methode nachweisen, die auch die Zehnzahl ohne Weiteres erscheinen lässt und mit gleichem Erfolge auf die allgemeine Aufgabe (für eine Form n^{ten} Grades die Substitutionen (1) zu finden, vermöge deren die Coefficienten von λ^{n-1} und λ^1 verschwinden) anwenden lässt.

Geht eine gegebene Form

(9) $f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_0\,\lambda^6 + 6\,a_1\,\lambda^5 + \dots .6\,a_5\,\lambda + a_6$

vermöge der Substitution

$$(10)\quad \lambda' = \frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda - \eta} \text{ oder } \lambda = \frac{\lambda'\eta - \varepsilon}{\lambda' - 1}$$

über {nach Multiplication mit $(\lambda'-1)^6$} in eine solche Form von λ', dass die Coefficienten von χ^5 und λ' verschwinden, so liefert die Taylor'sche Entwicklung die beiden Bedingungen (zur Bestimmung von α, β):

$$(11)\quad \mathrm{E} \equiv a_{\varepsilon^5\eta} = 0,\ \ \mathrm{H} \equiv a_{\eta^5\varepsilon} = 0.$$

Statt dieser wählen wir irgend zwei der fünf linearen Combinationen beider:

$$(12)\ \mathrm{E}-\mathrm{H}=0,\ \mathrm{E}\eta-\mathrm{H}\varepsilon=0,\ \mathrm{E}\eta^2-\mathrm{H}\varepsilon^2=0,\ \ldots\ \mathrm{E}\eta^4-\mathrm{H}\varepsilon^4=0$$

z. B. *) die erste und letzte, die entwickelt nach Weglassung des Faktors $(\varepsilon-\eta)$ lauten $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \varepsilon + \eta,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \varepsilon\eta\right)$:

$$(13)\ \begin{cases} a_0\,\sigma_1\,\sigma_2\,(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_0\,\sigma_2) + a_1\,(\sigma_1^4 - 4\,\sigma_2^2\,\sigma_0^2 + 2\,\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_0) \\ a_6\,\sigma_0\,\sigma_2\,(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_0\,\sigma_2) + \qquad \cdot \qquad + \qquad \cdot \ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} + 5\,a_2\,\sigma_1^3\,\sigma_0 + 10\,a_3\,\sigma_1^2\,\sigma_0^2 + 10\,a_4\,\sigma_1\,\sigma_0^3 + 4\,a_5\,\sigma_0^4 \equiv \mathrm{E}-\mathrm{H} = 0 \\ + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + 4\,a_1\,\sigma_2^3 \equiv \mathrm{E}\eta^4 - \mathrm{H}\varepsilon^4 = 0 \end{cases}$$

wo die zweite aus der ersten durch gleichzeitige Vertauschung von a_i mit a_{6-i} und σ_0 mit σ_2 hervorgeht.

Die gemeinsamen Lösungen von (11) sind auch in den gemeinsamen Lösungen von (13) enthalten, umgekehrt aber enthält (13) noch fremde Lösungen, die durch Verschwinden von

$$(14)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \eta^4 & \varepsilon^4 \end{vmatrix} \equiv (\varepsilon-\eta)\,(\varepsilon+\eta)\,(\varepsilon^2+\eta^2) = 0$$

---

*) Die Entwicklung gilt für irgend ein Paar der Bedingungen (12) in ganz analoger Weise. Dann treten als fremde Lösungen noch die Werthe ε (resp. η) $= 0$, ∞ auf, denen Schnittpunkte der bezüglichen Curven (13) mit den Geraden $\sigma_2 = 0$, $\sigma_0 = 0$ entsprechen. Die aus den fünf Curven (12) linear zusammengesetzte Schaar ist dann keine andere, als die ganze ∞^4 durch die zehn Punkte (ε, η) gehende Schaar von Curven vierter Ordnung.

entstehen, wo aber der erste Faktor schon bedeutungslos geworden ist, da er in (13) weggelassen wurde.

Die beiden andern Faktoren führen, wie leicht zu zeigen, zu $2 + 4 = 6$ fremden Lösungen. Bezogen auf irgend einen Normkegelschnitt, stellen die Gleichungen (13) zwei Curven vierter Ordnung dar, mit je einem Doppelpunkte in resp. ($\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 0$). Die Tangenten in diesen sind resp.

$$(15)\ \sigma_0 = 0,\ a_0 \sigma_1 + 2 a_1 \sigma_0 = 0;\ \text{und}\ \sigma_2 = 0,\ a_6 \sigma_1 + 2 a_5 \sigma_2 = 0.$$

Daher treffen sich die Curven (13) auf der Geraden $\varepsilon + \eta \equiv \sigma_1 = 0$ in einem Punktepaar

$$(16)\quad a_1 \sigma_2^2 - a_5 \sigma_0^2 = 0.$$

Dies sind die dem Faktor $(\varepsilon + \eta)$ in (14) zugehörigen fremden Lösungen. Die für den zweiten

$$(17)\ \varepsilon^2 + \eta^2 = \sigma_1^2 - 2 \sigma_0 \sigma_2 = 0$$

erhält man durch den Schnitt dieses Kegelschnitts, der den Normkegelschnitt in den Punkten $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = 0$ berührt, mit den Curven (13). Setzt man z. B. in die erste den Werth (17): $\sigma_2 = \frac{\sigma_1^2}{2 \sigma_0}$ ein, so kommt:

$$(18)\ \sigma_0^4 (a_1 \sigma_1^4 + 5 a_2 \sigma_1^3 \sigma_0 + 10 a_3 \sigma_1^2 \sigma_0^2 + 10 a_4 \sigma_1 \sigma_0^3 + 4 a_5 \sigma_0^4) = 0,$$

d. i. die erste Curve (13) hat nicht nur, wie (15) zeigt, in dem Doppelpunkt $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 0$, der ja ein Punkt des Normkegelschnitts ist, dessen Tangente ($\sigma_0 = 0$) als die eine Doppelpunktstangente, sondern osculirt auch noch den Kegelschnitt (17) in ihm.

Das Entsprechende gilt für die zweite Curve (13) und ihren Doppelpunkt. Demnach schneiden sich beide Curven (13) nur noch in vier Punkten auf dem Kegelschnitt (17).

β) „Die übrigen $10 = 16 - 6$ Schnittpunkte des Curvenpaares (13) müssen somit die Werthepaare

(ε, η) liefern, die die gestellte Frage lösen. Diese bilden dann gerade den Cyclus des Satzes α)" *).

§. 30.

Die biquadratischen Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren.

187. Man verdankt Cremona[59] die drei Sätze:

γ) „I. Zwei cubische Raumcurven haben im Allgemeinen *zehn* gemeinsame Axen (Sehnen)—

*) Die zehn Werthepaare (ε, η), die die Aufgabe somit lösen, waren die vier Argumentenpaare ψ_i der Doppeltangenten einer R_4^2 (mit den Wendepunkten $J = 0$) nebst ihren sechs bez. Funktionaldeterminanten ψ_{ik}. Diese letzteren bildeten drei (harmonische) Quadrupel der Involution $a_s = 0$, $b_s = 0$.

War diese Involution auf dem Normkegelschnitt N_2 dargestellt, so repräsentirten ihre Elementenpaare die Punkte einer H_3-Curve, die aus N_2 das Sextupel J ausschnitt.

Andererseits bildeten nach Nr. 152 (nur dass wir uns jetzt dualistisch ausdrücken die vier Geraden, die aus N_2 die Paare ψ_i ausschneiden (von deren Schnittpunkten also die Tangentenpaare ψ_{ik} an N_2 gehen) ein Polvierseit von N_2. Da aber seine Gegeneckenpaare drei Quadrupel der Involution bilden, so ist dies Polvierseit der H_3-Curve einbeschrieben: somit ist die letztere (cf. Nr. 148) in der Form darstellbar:

$$\Sigma \frac{m_i}{D_i} = 0$$

wo die $D_i = 0$ die Seiten des Polvierseits sind.

„Mithin ist eine Form sechsten Grades J auf fünf bestimmte Weisen in der Form

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \Sigma \frac{m_i}{\psi_i} \quad J$$

darstellbar, wo die ψ die fünf Quadrupel bilden, in die sich die zehn Werthepaare ε, η (doppelt gezählt) anordnen."

(Jedem Quadrupel gehört eine bestimmte Gruppe der Constanten m_i an.)

II. Jede derselben besitzt im Allgemeinen *sechs* Axen (Sehnen), die Sehnen (Axen) der andern sind.

III. Es giebt im Allgemeinen sechs cubische Curven, die sechs beliebige Raumgerade zu Axen (Sehnen) haben."

Diese Sätze ermöglichen in Verbindung mit der Theorie der Hurwitz'schen Curven H_3 eine höchst fruchtbare Behandlung unserer Involutionen (spec. der Titelfrage) auf cubischen Raumcurven.

Diese stellt sich dann so:

Wieviel Curven H_3 giebt es, die sechs beliebig gewählte Axen der gegebenen cubischen Curve φ zu Sehnen haben?

Diese Frage ist offenbar eine Verallgemeinerung der im vorigen §. behandelten, auf die man wieder zurückgeführt wird, wenn man die sechs Axen von φ zu Tangenten werden lässt.

Dann giebt es nach (γ III) sechs cubische Curven, die diese Tangenten zu Sehnen haben; eine von ihnen ist aber ersichtlich φ selbst. Daher zeigen die Ergebnisse des vorigen §. zunächst:

δ) „Die fünf cubischen Curven, die sechs beliebige Tangenten ω der gegebenen, φ, zu Sehnen haben, sind identisch mit den fünf Curven H_3 des Satzes (pg. 211), deren zugehörige Involutionen diejenigen sind, die die Doppelelemente ω gemein haben.

Für jede der Curven H_3 und φ gilt dann Satz

[Auch diesen Satz findet man bei H. Brill (Math. Ann. XX pg. 355), wenn auch ganz anders bewiesen, wie ich nachträglich zu bemerken habe. Anfang Februar 1883.]

γ II nicht mehr, da es unendlich viele Axen von φ giebt, die Sehnen von H_3 sind."

Die näheren Beziehungen zwischen diesen Curven ergeben sich sofort mit Hülfe der uns schon bekannten Involutionssätze und des Satzes γ I: sie fliessen aber als specielle Fälle aus der Configuration, die die allgemeinere (Titel-)Frage nach sich ziehen wird.

188. Zunächst giebt es wieder sechs cubische Curven Γ, die sechs beliebige Axen $(u_i\, v_i)$ von φ zu Sehnen haben. Von diesen muss mindestens eine den Satz γ II befriedigen. Dann nach Satz γ III kann man sich die Curve φ entstanden denken, als eine von denen, die sechs ganz beliebige Raumgerade zu Axen $(u_i\, v_i)$ haben. Würde es dann für jede Curve Γ unendlich viele Sehnen geben, die Axen von φ wären, so wäre Satz γ II unmöglich *).

Andrerseits giebt es aber, wie wir wissen (cf. pg. 308) mindestens fünf Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren, also giebt es nur eine Curve Γ, die den Satz γ II befolgt, während die übrigen fünf H_3-Curven sind. Dann aber geht aus dem „Pentaedersatze" pg. 247 nunmehr der folgende hervor:

ε) I. „Von den sechs cubischen Curven Γ, die sechs beliebige Axen der Curve φ zu Sehnen haben, sind immer fünf H_3-Curven. Je zwei derselben haben noch drei, je drei noch eine Sehne gemein, die zugleich Axen von φ sind. Diese stellen die Restelementenpaare dar, die je zwei resp. drei der fünf zugehörigen Involutionen noch gemein haben.

*) In genau derselben Weise schliesst man, dass für je zwei der fünf H_3-Curven oder auch je zwei der sechs Curven a (cf. Nr. 189) der Satz γ I gelten muss. Denn man gehe umgekehrt von zwei Curven des Satzes γ I aus, greife aus den zehn gemeinsamen Axen sechs heraus und verfahre dann, wie im Texte.

II. Stehen zwei cubische Curven in der Beziehung, dass es unendlich viele Sehnen der einen giebt, die zugleich Axen der andern sind, so ist diese Beziehung auch eine Hurwitz'sche, d. h. diese Geraden ordnen sich an als die Gegenkanten von unendlich vielen der ersten Curve ein- und der zweiten umbeschriebenen Tetraedern."

Zu Satz I ist zu bemerken, dass in der That die drei Sehnen, die je zweien der fünf Curven H_3 noch gemein sind (und zugleich Axen von φ sind) mit der vierten (die zugleich Sehne der sechsten Curve Γ ist cf. unten) und mit den ursprünglichen sechs Axen von φ die zehn Sehnen bilden, die nach Satz γ I beiden Curven gemein sein müssen.

Satz II gilt, weil man von den vorausgesetzten unendlich vielen Axen von φ (die Sehnen der zweiten Curve sind) irgend sechs herausgreifen und auf diese den Satz I anwenden kann.

189. Wir vervollständigen jetzt unsere Figur dadurch, dass wir noch die fünf weiteren Curven legen, die unsere sechs Axen von φ gleichfalls zu Axen haben. Nennen wir alle diese die Curven α_i, dagegen jene, die sie zu Sehnen haben, a_i ($i = 1, 2, .. 6$), so haben wir eine Configuration von 2.6 cubischen Curven, die der bekannten einer Doppelsechs einer Fläche dritter Ordnung analog ist. Gerade wie da jeder Geraden der einen Sechs eine einzige der andern entspricht und umg. (die zu ihr windschief ist, während sie die fünf andern trifft), so folgt hier unmittelbar aus Satz ε I:

ζ) „Die beiden Sechsen von Curven a_i, α_i ($i = 1..6$), die sechs beliebige Raumgerade g zu Sehnen resp. Axen haben, stehen in dem eigenthümlichen Verhältniss, dass jede Curve a_i einer bestimmten Curve α_i (denen daher der gleiche Index beigelegt wird) u. umg. eindeutig entspricht, so, dass die

sechs Geraden g die *einzigen* sind, die Sehnen von a_i und Axen von α_i sind.

Dagegen stehen je zwei Curven a_i, α_k $(i \gtrless k)$ in der Hurwitz'schen Beziehung, d. h. es giebt ausser den Geraden g *noch unendlich viele* Sehnen von a_i, die Axen von α_k sind."

Daher erweitert sich mit Hülfe des Satzes γ I der Satz ε I zu folgendem, der die sechs Curven a_i (α_i) ganz gleichmässig behandelt:

η) „Die sechs cubischen Curven a_i (die sechs beliebige Gerade g zu Sehnen haben) besitzen ausser diesen noch zu je zweien vier gemeinsame Sehnen, also im Ganzen $\frac{6.5}{1.2} \cdot 4 = 60$.

Diese reduciren sich aber auf 20, da jede von ihnen gemeinsame Sehne s_{ikl} von drei der Curven a_i, a_k, a_l ist (also dreimal auftritt).

Diese 20 Linien sind zugleich die entsprechenden 20 weiteren Axen σ von je dreien der Curven α_i (die die Geraden g zu Axen haben) und zwar ist immer

$$s_{ikl} = \sigma_{mnp} \; (i, k, l, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Desgleichen sind die vier Sehnen, die je drei en der Curven a gemein sind:

$$s_{ikl} \quad s_{ikm} \quad s_{ilm} \quad s_{klm}$$

nebst den 6 Geraden g die 10 gemeinsamen Axen der beiden Curven α_n α_p.

Die sechs Geraden, die je vier der sechs Curven a

$$a_i \quad a_k \quad a_l \quad a_m$$

mit einer der beiden übrigen a_n zu gemeinsamen Sehnen haben, ordnen sich in drei Paare

$$\begin{Bmatrix} s_{nik}, & s_{nil}, & s_{nkm} \\ s_{ilm}, & s_{nkm}, & s_{nkl} \end{Bmatrix}$$

die Gegenkanten dreier Tetraeder sind, die a_n ein- und α_p umbeschrieben sind."

Desgleichen gelten die reciproken Sätze (indem man die a mit den resp. α vertauscht), so dass man den Satz η als „Hexaeder"-Satz kurz so formuliren kann:

η_1) „Die beiden Sechsen von Curven a, α sind in Bezug auf ihre gemeinsamen Sehnen, resp. Axen gruppirt, wie die Ecken resp. Ebenen eines Hexaeders resp. Sechsecks, wo das letztere dem ersteren um- (und damit das erstere dem letzteren ein-) beschrieben ist."

190. Andrerseits waren (Nr. 155) fünf Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren $(u_i\ v_i)$ dargestellt durch die vier Strahl- und das Kegelschnittbüschel (D_k, D) von vier Doppelpunkten einer rationalen ebenen Curve sechster Ordnung R_6^2 mit den sechs weiteren Doppelpunkten $(u_i\ v_i)$, und zwar schneiden diese fünf Büschel die Involutionen aus der Curve aus.

Weiter unten wird gezeigt, dass umgekehrt die sechs Argumentenpaare $u_i\ v_i$ für die Curve ganz beliebig angenommen werden dürfen, dann aber alle übrigen Singularitätenargumente bestimmt sind.

Dann sind aber gerade die Argumentenpaare $(\varepsilon_k\ \eta_k)$ der vier Doppelpunkte D_k solche vier Elementenpaare, die je dreien von irgend vier der fünf in Rede stehenden Involutionen gemein sind: mithin folgt daraus und aus Satz η):

$\varkappa$) „Die zehn Argumentenpaare der Doppelpunkte einer R_6^2 stehen in derselben Beziehung zueinander, wie die zehn Argumentenpaare einer

cubischen Raumcurve, die zehn Axen (Sehnen) zugehören, die zugleich Axen (Sehnen) einer zweiten solchen Curve sind."

Umgekehrt bestimmen also irgend zwei in allgemeiner *) Lage befindliche cubische Raumcurven sowohl durch ihre gemeinsamen Axen als auch Sehnen je eine Klasse **) von R_6^2, deren Individuen projektivisch in einander überführbar sind.

Aus dem Dualismus von Axe und Sehne folgt weiter:

$\varkappa_1$) „Jeder R_6^2 ist eine bestimmte andere eindeutig zugeordnet und umg.: ihre Doppelpunktsargumente entsprechen den gemeinsamen Axen und Sehnen zweier cubischer Raumcurven."

191. Geht man von zwei cubischen Raumcurven α_5, α_6 aus, greift aus ihren zehn gemeinsamen Axen irgend sechs heraus, so sind stets die vier übrigen nach dem Schema des Satzes η)

$$s_{123} \quad s_{124} \quad s_{134} \quad s_{234}$$

Sehnen von vier weiteren Curven a_1, a_2, a_3, a_4. Dies führt zu dem Satz, den ich nachträglich auch bei H. Em. Weyr[60] gefunden habe:

λ) „Die zehn gemeinsamen Axen (Sehnen) zweier cubischer Raumcurven sind zu je neun Sehnen (Axen) einer weiteren cubischen Curve."

Ausserdem wissen wir von ihnen:

---

*) Haben die beiden Curven resp. ein, zwei, drei Ebenen (Punkte) gemein, so haben sie nach Cremona (l. c.) nur noch resp. sechs, drei, eine Axe (Sehne) gemein. Deren Elementenpaare entsprechen dann, wie hier nur angeführt sei, den Doppelpunkten einer R_5^2, R_4^2, R_3^2, die aus der R_6^2 continuirlich in einander übergehen können.

**) Eine solche ganze Klasse (algebraisch „die zugehörige Formengruppe") ist immer (wie auch schon bis jetzt) durch das Zeichen R repräsentirt; zur Abkürzung ist gewöhnlich nur „von einer Curve R" die Rede.

λ_2) „Jede dieser zehn (zehn) weiteren Curven ist eine Hurwitz'sche H_3-Curve der Originalcurve d. h. je neun der zehn zugehörigen Elementenpaare sind die einer Involution vierter Ordnung.“

Aus dem Bilde der R_6^2 lassen sich mit Leichtigkeit noch weitere Beziehungen zwischen diesen 10 Involutionen ablesen.

Die zehn Axen seien bezeichnet mit $(u_r\, v_r)$ $(r = 1, 2, .. 10)$: die entsprechenden zehn Involutionen mit J_r. In jeder giebt es neun weitere Elementenpaare, die mit den neun gegebenen neun Quadrupel der Involution bilden. Solcher weiteren Paare giebt es im Ganzen $\frac{10 \,.\, 9}{2} = 45$, da jedes zweimal auftritt.

Man gelangt zu ihnen auch dadurch, dass je zwei der zehn Involutionen noch ein weiteres Elementenpaar gemein haben. Dies sind die 45 Paare.

Zu je sieben der zehn Paare $(u_r\, v_r)$ gehören immer drei der 45 weiteren Paare in der Weise, dass diese keiner der sieben Involutionen J_s $(s = 1, 2, .. 7)$ angehören.

„Diese sieben + drei Paare bestimmen zehn Axen, die wieder zugleich Axen einer weiteren cubischen Curve sind. Solcher weiteren Curven giebt es daher 120.“

Diese Eigenschaften, die leicht noch weiter ausgedehnt werden können, mögen hier genügen. Greift man irgend sechs der zehn Axen heraus, so kommt man wieder zur ursprünglichen Doppelsechs zurück, die somit nur ein specieller Fall des jetzigen ist.

§. 31.

Fortsetzung. Das Schnittpunkttheorem der R_6^2, auf der cubischen Normcurve studirt.

192. Das weitere Studium der aus zwei cubischen Raumcurven bestehenden Figur wird sich auf die Fläche (vierter

Ordnung) concentriren, auf der die zehn gemeinsamen Axen beider liegen. Dies geschieht mit grosser Leichtigkeit mit Hülfe des Schnittpunkttheorems der R_6^2, oder was dasselbe ist, mit Hülfe der Theorie der zweigliedrigen Gruppen sechster Ordnung resp. ihrer conjugirten. Man wird also behufs eingehenden Studiums der biquadratischen Involution jetzt zum zweiten *) Mal auf die Theorie der Gruppen sechster Ordnung verwiesen.

Die projektivischen Eigenschaften einer R_6^2 (d. h. einer dreigliedrigen Gruppe sechster Ordnung) hängen ersichtlich von 12 Constanten ab. Demgemäss kann man nach denjenigen R_6^2 fragen, für die sechs ihrer zehn Doppelpunkte ganz beliebig gewählte Argumentenpaare $(u_1 v_1)$ besitzen. Man denke sich eine Curve mit dieser Eigenschaft gegeben. Dann lege man ein Dreieck, dessen Seiten immer zwei der sechs Doppelpunkte enthalten. Dann giebt es in der Gruppe der R_6^2 drei Formen der Art:

$$(1)\quad f_1 \cdot f_2 \cdot f_{12};\ f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34};\ f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}$$

wo $(u_1 v_1)$ die Wurzeln der quadratischen Form f_1 sind: während die f_{12}, f_{34}, f_{56} drei unbekannte quadratische Formen vorstellen. Sollen die $(u_1 v_1)$ in der That Doppelpunkten zugehören, so sind sechs Bedingungen dazu nothwendig und hinreichend von der Form:

$$(2)\quad \left\{\frac{f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34}}{f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}}\right\}\lambda = u_1 = \left\{\frac{f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34}}{f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}}\right\}\lambda = v_1$$

wo die Variable λ links durch u_1, rechts durch v_1 ersetzt ist.

Dies liefert zur Bestimmung der sechs Unbekannten (der Restpunktepaare der Seiten des Dreiecks oder der Wurzeln von f_{12}, f_{34}, f_{56}) sechs Gleichungen.

---

*) Das erste Mal in Nr. 132 zu einer Form sechster Ordnung und ihrer conjugirten Gruppe.

Aber eine solche Bestimmungsweise ist bekanntlich unsicher: die sechs Gleichungen (2) könnten abhängig von einander sein, und somit auch die Wurzeln der f_i.

Dann gäbe es im Allgemeinen keine aus (1) (wo die f die vorgegebene Bedeutung haben sollen) zusammensetzbare dreigliedrige „(R_6^2)"-Gruppe: würde es aber im besondern eine geben, so auch unendlich viele.

Die Unmöglichkeit des letzteren Falles soll dargethan werden: dann existiren Lösungssysteme von (2). Nun aber existirte für den Fall $u_i = v_i$ nach Früherem nur eine endliche Zahl von (5) Lösungen: also auch im Allgemeinen und zwar dann wie wir wissen, die gleiche Zahl. *q. e. d.* Somit gilt:

α) „Bei beliebiger (nur nicht specieller*)) Annahme der $(u_i\, v_i)$ d. i. der f_i giebt es fünf Lösungssysteme für die Coefficienten der f_{12}, f_{34}, f_{56} in (2)."

193. Das Schnittpunkttheorem einer R_6^2 lautet nach dem allgemeinen Satz der Nr. 6:

$$(3)\quad a_s = 0,\; b_s = 0,\; c_s = 0,\; d_s = 0$$

wo diese Formen aus den „Schnittpunktformen" a_λ, b_λ, c_λ, d_λ durch Polarisation nach sechs Elementen entstehen. Diese letzteren Formen bilden die zu (1) conjugirte Gruppe, deren Combinanten mit denen der Gruppe der R_6^2 identisch sind (cf. Nr. 26). Diese Formen, mithin auch die Formen (3) sind demnach ganz beliebig wählbar.

---

*) Wählt man z. B. für die $(u_i\, v_i)$ die Argumente der sechs Doppelpunkte einer R_5^2, so giebt es, wie leicht zu sehen, unendlich viele Lösungen. Denn dann giebt es unendlich viele Curven H_3, die die bezüglichen sechs Axen der cubischen Grundcurve φ zu Sehnen haben.

Gemäss der Entwicklung der Nr. 23 kann man sie auch so schreiben:

$$(4)\quad a_\sigma a_\tau = 0,\ b_\sigma b_\tau = 0,\ c_\sigma c_\tau = 0,\ d_\sigma d_\tau = 0.$$

Diese Gleichungen sagen dann aus, dass das Punktepaar σ, τ in Bezug auf die Flächen

$$(5)\quad a_\sigma^2 = 0,\ b_\sigma^2 = 0,\ c_\sigma^2 = 0,\ d_\sigma^2 = 0$$

(und damit auch in Bezug auf das ganze aus ihnen linear constituirte „Gebüsch") conjugirt sind. Jede Fläche des Gebüsches stützt die Normcurve N_3.

Werden die partiellen Differentialquotienten von a_σ^2 nach σ_i mit A_i bezeichnet, analog die von b_σ^2 mit B_i etc., so liefert die Elimination der τ aus (4) das biquadratische Schnittpunkttheorem erster Ordnung der R_6^2 (1) (oder (3)) (wegen des Ausdrucks cf. §. 2):

$$(6)\quad F_4 = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Fläche vierter Ordnung, die sogenannte Jakobi'sche[61] der Flächen (5) (d. i. der Ort der Spitzen aller Kegel ihres Gebüsches) heisse kurz „die Darstellungsfläche des Schnittpunkttheorems einer R_6^2 oder noch kürzer die Darstellungsfläche einer R_6^{2}".

Die Punkte der Fläche sind sich involutorisch in der Art zugeordnet, dass zu jedem Punkte von ihr ein zweiter solcher gehört und zu diesem wieder der erste, die dann die Gegenecken eines der Normcurve N_3 umschriebenen gemeinsamen Polsechsflachs des Gebüsches (5) bilden, mithin neun weitere solche Punktepaare (als die weiteren Gegenecken des Sechsflachs) nach sich ziehen.

Die Schnittpunkte von F_4 mit N_3 sind durch die Funkti-

onaldeterminante der Formen a_λ, b_λ, c_λ, d_λ gegeben, stellen somit nach Satz pg. 41 die zwölf Wendepunkte der R_6^2 dar. Aus dem Begriff der Wendetangente folgt ohne Weiteres für die Fläche:

β) „Die Tangente der Normcurve N_3 in einem ihrer Schnittpunkte W mit F_4 trifft diese in drei weiteren Punkten P_1 P_2 P_3. Von jedem geht noch *eine* Ebene an N_3 (λ_1 resp. λ_2 resp. λ_3). Die drei Axen dieses Trieders osculiren die Fläche im Punkte W."

Eine R_6^2 besitzt bekanntlich 24 Doppeltangenten (d_i e_i): andrerseits die Fläche F_4 (wie jede Fläche vierter Ordnung) 48 mit N_3 gemeinsame Tangenten.

Aus dem Begriff der Doppeltangente folgt:

γ) „Die 48 der Fläche F_4 mit der Curve N_3 gemeinsamen Tangenten theilen sich in 24 Paare derart, dass für jedes Paar (d_i e_i) die Berührungssehne der Fläche die Axe (d_i e_i) von N_3 ist."

Jede Gerade in der Ebene der R_6^2 trifft sie in sechs Punkten, die zehn Tripelpaare σ, τ bilden. Diese bilden im Raume gerade die zehn Gegeneckenpaare eines N_3 um- und F_4 einbeschriebenen Sechsflachs (eines Polsechsflachs des Gebüsches (5)): also:

δ) „Es giebt ∞^2 gemeinsame Polsechsflache des Gebüsches (5), die der Jacobi'schen Fläche F_4 derselben ein- und einer *auf dem Gebüsch ruhenden cubischen* Raumcurve umbeschrieben sind."

Es seien λ_1 λ_2 . . . λ_6 sechs Punkte der R_6^2 auf einer Geraden. Demnach trifft die Axe (λ_1 λ_2) von N_3 die F_4 in vier Punkten:

$$(7)\ (\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)\ (\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_4)\ (\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_5)\ (\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_6).$$

Ist aber $(\lambda_1\ \lambda_2)$ ein Doppelpunkt der R_6^2, so werden die Restpunkte unbestimmt und ihre Elemente bilden eine biquadratische Involution. Demnach haben wir:

ε)*) „Den zehn Doppelpunkten $(u_i\ v_i)$ der R_6^2 entsprechen zehn Axen $(u_i\ v_i)$ von N_3, die ganz auf der Fläche F_4 liegen. Die den Punkten einer solchen Geraden auf der Fläche involutorisch zugeordneten Punkte durchlaufen eine H_3-Curve (H_3^i)."

194. Nach Satz ϰ) Nr. 190 bilden aber diese zehn Axen von N_3 zugleich zehn Axen einer zweiten cubischen Curve ψ: welche Beziehung hat sie zum Gebüsch (5)?

Nimmt man ψ für den Augenblick zur Normcurve, so gilt für sie gemäss dem citirten Satze in Bezug auf die R_6^2 dasselbe, wie für N_3: d. h. die zehn Axen liegen auf einer zweiten F_4. Da aber auf dieser auch die zehn H_3-Curven liegen, die je neun der zehn Axen zu Sehnen haben, so müssen beide Flächen identisch sein (da ihre Schnittcurve ja von höherer als der 16. Ordnung wäre). Dies liefert den Reyeschen[62] Satz:

ζ) „Die Fläche vierter Ordnung F_4, die durch die zehn gemeinsamen Axen zweier cubischer Raumcurven geht (und dadurch völlig bestimmt ist) ist die Jacobi'sche Fläche eines beide Curven stützenden Gebüsches von Flächen zweiter Ordnung.

*) Die Sätze (β) bis (ε) bilden die Analogien zu den Eigenschaften einer H_2-Fläche der cubischen Curve.

Die zehn Axen sind die Geraden der zehn im Gebüsch befindlichen Ebenenpaare."

Das Letzte ergiebt sich hier leicht aus dem Begriff eines Doppelpunktes (sowie auch aus Nr. 137). Denn ist α, β einer der Doppelpunkte der R_6^2, so ist eine der aus den Formen (3) linear zusammensetzbaren von der Gestalt:

$$(\gamma)\ \delta_s \equiv (\lambda_1 - \alpha) \ldots (\lambda_6 - \alpha) - \tau (\lambda_1 - \beta) \ldots (\lambda_6 - \beta)$$

d. h. eine Form der zur R_6^2 conjugirten Gruppe ist als Summe von zwei sechsten Potenzen (von $(\lambda - \alpha)$ und $(\lambda - \beta)$) darstellbar. Dann aber wird die zu (8) gehörige Fläche:

$$(9)\quad A^2 - \tau B^2 = 0$$

wo $A = 0$, $B = 0$ die Ebenen α, β der Normcurve darstellen; sodass das Ebenenpaar (9) zu ihnen harmonisch ist.

Mithin ist jede Axe $(u_1 v_1)$ Gerade eines Ebenenpaares des Gebüsches (5).

Solcher Ebenenpaare giebt es aber bekanntlich zehn *). Die Gleichung (9) lehrt:

ζ_1) „Die dem Flächengebüsch des Satzes ζ) angehörigen zehn Ebenenpaare erhält man als die resp. Ebenenpaare, die zu den beiden von je einer der zehn Axen an die beiden cubischen

*) Dass es kein weiteres Ebenenpaar des Gebüsches (5) (das, wie sich gleich zeigen wird, ein ganz allgemeines Gebüsch ist) giebt, ist leicht so einzusehen. Für ein Ebenenpaar verschwinden alle ersten Unterdeterminanten seiner Determinante (und umgekehrt sind dies für eine F_2 die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass sie ein Ebenenpaar wird).

Diese Unterdeterminanten sind aber für den Fall einer eine cubische Curve stützenden F_2 identisch mit den Kernen der Matrix der pg. 216. Dann aber ist, wie damals gezeigt wurde, die Form, die die sechs Schnittpunkte von Fläche und Curve darstellt, als Summe von zwei sechsten Potenzen darstellbar. Mithin muss auch jedem Ebenenpaar des Gebüsches (5) ein Doppelpunkt der R_6^2 entsprechen. Deren giebt es aber nur zehn.

Curven gehenden Ebenenpaaren *harmonisch* sind."

Die Wichtigkeit des Satzes ζ) tritt aber erst durch seine Umkehrung hervor (die gleichfalls schon Reye[62] behandelt hat), indem man von einem beliebigen Flächengebüsch zweiter Ordnung ausgeht. Wir verfahren hier so.

Für eine cubische Curve sind es drei Bedingungen, damit sie auf einer F_2 ruht: mithin zwölf Bedingungen, sofern sie auf einem ganzen Gebüsch von F_2 ruhen soll.

Gäbe es trotzdem im Allgemeinen keine Curve dieser Art, so müssten es ihrer, wenn eine existirt, unendlich viele geben. Existirt aber eine, so giebt es nach Obigem weder eine unendliche Anzahl, noch mehr als eine einzige zweite, deren mit der ersten gemeinsame Axen die Geraden der zehn Ebenenpaare des Gebüsches sind.

„Beides folgt daraus, dass man *sechs* solcher zehn Axen beliebig wählen darf." Denn dann giebt es, wie wir wissen, nur fünf weitere Curven, die diese sechs Axen ebenfalls zu solchen haben, und unter diesen nur eine, für die auch die vier weiteren Axen solche sind. *q. e. d.* Dies ist die Reye'sche*) Umkehrung von ζ):

ζ_2) „Es giebt zwei cubische Raumcurven, die auf einem Flächengebüsch zweiter Ordnung ruhen. Ihre gemeinsamen zehn Axen sind die Kanten der zehn Ebenenpaare des Gebüsches."

Daraus folgt dann wieder:

---

*) [Die Sätze ζ) ζ_2) glaubte ich als neue gefunden zu haben und habe sie in dieser Meinung auch in der kurzen Note Math. Ann. XXI pg. 133 mitgetheilt. Herr Reye war so gütig, mich darauf aufmerksam zu machen, dass sie sich bereits in seiner Abhandlung Crelle's Journal Bd. 82 pg. 78, 79 befänden, was meinem Gedächtniss entfallen war, da ich diesen Aufsatz schon vor mehreren Jahren gelesen hatte.

Nachträgliche Bemerkung, Anfang Februar 1883.]

ζ_3) „Die Sätze β) bis ε) gelten für beide cubische Curven (ψ, N_3) ganz gleichmässig."

Also ist z. B. jedes (in Bezug auf das Flächengebüsch) conjugirte Punktepaar der Fläche F_4 ein Paar Gegenecken von zwei Polsechsflachen des Gebüsches, von denen das eine der einen, das andere der andern cubischen Curve umbeschrieben ist.

Da man aus den sechs cubischen Curven, die sechs beliebige Raumgerade zu Axen haben, 15 Paare bilden kann, so gilt auch der Satz:

ζ_4) „Nimmt man sechs beliebige Raumgerade als Kanten von sechs (noch unbestimmten) Ebenenpaaren eines Flächengebüsches zweiter Ordnung, so giebt es fünfzehn solcher Gebüsche, denen fünfzehn Jacobi'sche Flächen zugehören."

Diese Betrachtung ist ähnlicher Natur wie die von Rosanes[63] angestellte, der von vier Kanten von vier *) bestimmten Ebenenpaaren ausgeht und daraus die sechs folgenden Kanten bestimmt.

§. 32.

Fortsetzung. Das Schnittpunkttheorem der R^3_6, auf der cubischen Curve studirt.

195. Unser Flächengebüsch zweiter Ordnung (5) schneidet, wie wir wissen, aus der Normcurve N_3 (d. h. der einen der beiden auf ihm ruhenden cubischen Curven, auf die wir uns jetzt wieder beschränken) das „Sextupelgebüsch":

*) Diese Aufgabe kommt also wegen Satz ζ_1) auf die andere hinaus: Eine cubische Raumcurve zu construiren, die vier gegebene Raumgerade so zu Axen hat, dass das von je einer derselben an die Curve gehende Ebenenpaar immer einer bestimmten (Ebenen-) Involution (zweiten Grades) angehört.

Solcher Curven giebt es dann nach Obigem zwei etc.

$$(10)\ L \equiv \lambda_a\, a_\lambda + \lambda_b\, b_\lambda + \lambda_c\, c_\lambda + \lambda_d\, d_\lambda\ (=0)$$

aus. Die dazu conjugirte Gruppe sei bezeichnet mit

$$(11)\ M \equiv \mu_\alpha\, \alpha_\lambda + \mu_\beta\, \beta_\lambda + \mu_\gamma\, \gamma_\lambda$$

wo die μ, wie in (10) die λ, variable Constanten sind.

Zu jedem Sextupel M von Ebenen der Curve N_3 gehört eine bestimmte Fläche zweiter Klasse Φ_2, die diese Ebenen mit N_3 gemein hat und zugleich auf N_3 ruht. Der ganzen Gruppe (11) gehört also eine Schaarschaar von Flächen Φ zu: sie heisse M_2. In gleicher Weise heisse unser Flächengebüsch das Gebüsch L_2. Dann wissen wir nach Satz Nr. 128:

η) „Die auf der Curve N_3 ruhende Schaarschaar M_2 ruht auch auf dem die Curve N_3 stützenden Gebüsch L_2 und zwar besteht sie aus *allen* auf der Curve und zugleich auf dem Gebüsch L_2 ruhenden Φ_2." „Und umgekehrt stützt das Gebüsch L_2 die Schaarschaar M_2 und zwar besteht es aus *allen* die Curve und die Schaarschaar M_2 stützenden F_2."

„Dies ist das quaternäre Gegenstück zu dem binären Satze, dass die Gruppen L und M conjugirt sind."

Nun bildet aber die Gruppe (10) „L" die Gruppe einer R^3_6, deren Schnittpunkttheorem durch

$$(12)\ \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0 \text{ oder auch durch}$$

$$M_s \equiv \mu_\alpha\, \alpha_s + \mu_\beta\, \beta_s + \mu_\gamma\, \gamma_s = 0$$

gegeben ist.

Aus M_s geht aber nach pg. 199 die Gleichung der Schaarschaar M_2 in der Weise hervor, dass wir aus (12) zuerst die Gleichungen

$$(13)\ \alpha_\sigma^2 = 0,\ \beta_\sigma^2 = 0,\ \gamma_\sigma^2 = 0 \text{ oder auch}$$

$$M_2 \equiv M_\sigma^2 \equiv \mu_\alpha\, \alpha_\sigma^2 + \mu_\beta\, \beta_\sigma^2 + \mu_\gamma\, \gamma_\sigma^2 = 0$$

und aus ihnen sodann mittelst der Substitutionen:

$$(14)\ \rho u_0 = \sigma_3,\ \rho u_1 = -\frac{\sigma_2}{3},\ \rho u_2 = \frac{\sigma_1}{3},\ \rho u_3 = -\sigma_0$$

die entsprechenden bilden:

$$(15)\ M_2 \equiv M_u^2 \equiv \mu_\alpha A_u^2 + \mu_\beta B_u^2 + \mu_\gamma \Gamma_u^2 = 0.$$

„Demnach stellt (15) die Schaarschaar M_2 dar."

Solange es aber nur auf die Eigenschaften der Gruppe (10) resp. ihres Schnittpunkttheorems (12) ankommt, benützen wir lieber die letztere Gleichung resp. die sie ersetzende (13) und übertragen das so Gewonnene auf die Schaarschaar M_2.

196. Eine R_6^3 besitzt bekanntlich acht dreimal berührende Ebenen.

In der That müssen diese durch die gemeinsamen Werthsysteme σ von (13) gegeben sein. Diese Gleichungen stellen aber ein die Curve N_3 stützendes Flächennetz zweiter Ordnung M_σ^2 dar: ihre 8 Grundpunkte die gewünschten Werthsysteme σ.

„Vermöge der Substitutionen (14) ist die Schaarschaar M_2 die dem Netze M_2 im Nullcomplexe der Curve N_3 conjugirte*)."

$\varkappa$) „Somit repräsentiren die acht Grundebenen**) der Schaarschaar M_2, bezogen auf N_3, die acht dreimal berührenden Ebenen der R_6^3 (10)."

$\varkappa_1$) „Durch irgend vier***) (beliebig annehm-

*) Denn die Substitution (13) ordnet jedem Punkte die durch ihn gehende Ebene des Nullcomplexes von N_3 zu.

**) Die acht „Grundebenen" einer Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse stehen den Grundpunkten eines Netzes von Flächen zweiter Ordnung dualistisch gegenüber.

***) Da die Darstellungsformen der (auf die Normcurve N_3 bezogenen) 8 Grundebenen der Schaarschaar M_2 diejenigen acht cubischen Formen

bare) Grundebenen ist unsere ganze Configuration eindeutig bestimmt."

sind, deren Quadrate sich in der Gruppe L befinden, und zwischen irgend fünf Formen dieser Gruppe stets eine lineare Identität herrschen muss, so gilt der interessante Satz (über den noch allgemeineren Satz cf. Kap. III):

„Irgend vier cubische (binäre) Formen bestimmen im allgemeinen stets vier andere, so dass nicht nur zwischen solchen acht Formen selbst (wie bekannt), sondern auch zwischen ihren Quadraten vier lineare Identitäten stattfinden. Solche acht Formen stellen immer die Grundpunkte eines eine cubische Raumcurve stützenden Flächennetzes zweiter Ordnung dar."

In dieser Gestalt erkennt man sofort die Verallgemeinerung des ternären Satzes pg. 241:

„Irgend drei quadratische Formen bestimmen im allgemeinen stets eine vierte, sodass zwischen den Quadraten der vier Formen eine lineare Identität gilt. Solche vier Formen stellen die Grundpunkte eines einen Kegelschnitt φ stützenden Kegelschnittbüschels dar."

Es möge hier ein noch einfacherer Beweis dieses Satzes mitgetheilt werden, der zugleich den Sinn der Identität klarer macht.

Von den Grundpunkten ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$) eines φ stützenden Kegelschnittbüschels waren drei beliebig annehmbar, der vierte eindeutig bestimmt. Die Punkte bildeten ein Polviereck von φ. Daher muss bekanntlich φ in der Form darstellbar sein:

$$\varphi \equiv \Sigma\, k_i\, u_i^2 = 0.$$

Setzt man daher statt der u_i die quadratischen Formen ein, die die von den Punkten an φ gehenden Tangentenpaare darstellen (d. h. sucht man die φ mit sich selbst gemeinsamen Tangenten), so muss die Gleichung für φ in die gewünschte Identität übergehen. *q. e. d.*

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch einige besondere Fälle in's Auge fassen. Liegen drei der Punkte in gerader Linie g (d. h. verschwindet die Combinantinvariante der zugehörigen quadratischen Formen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$), so zerfällt das φ stützende Büschel in die Gerade g und das Strahlbüschel P_4 der zu g in Bezug auf φ conjugirten Geraden.

Somit ist der Pol P_4 von g der gesuchte vierte Punkt, und der Satz bleibt vollkommen erhalten.

In der That giebt es nur eine **einzige** Schaarschaar M_2, für die sie vier der (acht) Grundebenen sind, und die auf der Curve N_3 ruht. Damit ist aber auch das Gebüsch L_2 bestimmt.

Statt der drei ersten φ kann man dann irgend drei lineare Combinationen derselben wählen, ohne dass die vierte Form φ_4 sich ändert.

Fragen wir jetzt, wann der Satz nicht mehr gilt d. h. wann die vierte Form φ_4 **unbestimmt** wird, so kann dies nur eintreten, wenn **alle** Kegelschnitte des durch die drei ersten Punkte (P_1 P_2 P_3) bestimmten Netzes φ **stützen**, im Speciellen also auch die drei Seitenpaare des Dreiecks P_1 P_2 P_3.

Dann muss jede Seite zu jeder andern **conjugirt** sein (in Bezug auf φ) d. h. das Dreieck ein **Poldreieck** von φ sein. Dann findet (indem man beweist wie oben) zwischen den Quadraten der **drei** φ_i eine lineare Identität statt und umgekehrt bedingt dies die Existenz eines Poldreiecks. Dann bilden die Formen der zugehörigen R_4^2-Gruppe eine Involution auf derjenigen Geraden, die einfach gezählt die R_4^2 jetzt darstellt.

Nach Früherem (pg. 109) stellen die Ecken eines solchen Poldreiecks (von φ) die Covariante Θ einer biquadratischen Form f d. h. die Doppelelemente der Involution $f + k\ H = 0$ dar. Die sämmtlichen Kegelschnitte, die aus φ die Formen dieser Involution ausschneiden, sind alle diejenigen, die das Dreieck P_1 P_2 P_3 zum Poldreieck haben.

Die zur Involution $f + k\ H$ conjugirte Gruppe stellt eine solche R_4^2 dar, deren Wendepunkte in den Doppelpunkten liegen. Dann giebt es noch eine ∞^2-Schaar von Wendekegelschnitten (cf. pg. 284) d. h. die quadratische Combinante Q der Gruppe (und damit der Involution) verschwindet identisch. Umgekehrt ist dies wieder die Bedingung eines Poldreiecks (φ_1 φ_2 φ_3), wie die Bildung von Q direkt zeigt. Die zur Involution $f + k\ H$ gehörigen Curven F_3 und H_3 (cf. Nr. 147) fallen beide in unser Poldreieck. Man hat demnach als Resultat:

„**Der Satz über die lineare Identität der vier quadratischen Formen φ_1 φ_2 φ_3 φ_4 versagt, wenn zwischen den Quadraten von *dreien* der φ eine lineare Identität herrscht, d. h. wenn drei der φ^2 *einer Involution* angehören und umgekehrt. Diese Involution ist dann von der Form $f + k\ H$ und die Combinante Θ das Product der drei φ,**

197. Ferner besitzt, wie man weiss, eine R_6^2 sechs vierfache Sekanten (die auf der einzigen durch die Curve gehenden Fläche dritter Ordnung eine halbe Doppelsechs bilden). D. h. algebraisch:

λ) „In der Gruppe L (10) giebt es sechs Involutionen (sechsten Grades), deren jede in ein festes Quadrupel und eine Involution zweiter Ordnung zerfällt."

Daraus folgt mit Anwendung der Sätze pg. 236 und pg. 237 anm. sofort:

λ_1) „In unserem Gebüsch L_2 (das die Curve N_3 stützt), giebt es sechs ausgezeichnete Büschel, die aus der Curve N_3 (je vier feste Punkte abgerechnet) eine Involution zweiter Ordnung ausschneiden.

Jede derselben besitzt ein Paar von Doppelelementen.

Die fünf biquadratischen Involutionen, die diese sechs Paare zu Elementenpaaren besitzen, haben jede sechs Doppelelemente.

Die fünf Sextupel werden von fünf Flächen des Gebüsches aus der Curve N_3 ausgeschnitten.

Dies sind zugleich die fünf H_2-Flächen des Gebüsches d. h. solche, denen (zweifach) unend-

während das vierte φ identisch verschwindet, wie auch die quadratische Combinante Q der Involution. Das Poldreieck (θ) stellt *zugleich* die dieser Involution zugehörige F_3-und H_3-Curve dar."

Andrerseits hat dann die der Involution (auf der cubischen Curve betrachtet) zugehörige Fläche H_2 die Eigenschaft, im Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirt zu sein.

Damit ist zugleich die früher aufgeworfene Frage nach der besondern Natur der Involution $f + k\ H$ erledigt.

lich viele Tetraeder ein- und der Curve umbeschrieben sind."

Den letzten Satz von λ_1) können wir separatim so formuliren:

λ_2) „In irgend einem Flächengebüsch zweiten Grades giebt es je fünf H_2-Flächen der beiden auf ihm ruhenden cubischen Curven."

Besonders beachtenswerth ist aber, dass hier der Zusammenhang zwischen der Theorie einer biquadratischen Involution und der einer drei- (vier-) gliedrigen Gruppe sechsten Grades, der schon oben betont ist, klar hervortritt. Denn vermöge der bekannten Abbildung der einen einer R_6^3 einbeschriebenen Fläche dritter Ordnung auf die Ebene (des Normkegelschnitts), die dem Satze λ_1 implicite zu Grunde liegt, erkennt man, wie die obigen Raumsätze über die R_6^3 (und damit zweier cubischer Curven) sofort auf die Configuration der durch sechs Punkte einer Ebene gehenden H_3-Curven eines Kegelschnitts übertragen werden können.

198. Welche Eigenschaft der Gruppe (11) entspricht der Eigenschaft λ) der conjugirten Gruppe (10)?

Die Antwort lautet:

λ_3) „Es giebt sechs Quadrupel (d. s. die des Satzes λ) $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, \delta_{4i}$ $(i = 1, \ldots 6)$ von der Art, dass die sechs zugehörigen Involutionen der Gruppe (11) die Form annehmen:

$$(16) \quad \sum_1^4 r \, (a_r + kb) \, (\lambda - \delta_{ri})^6.$$

Dies sind umgekehrt die *einzigen* Involutionen der Gruppe (11), deren Formen als Summen je *derselben* vier sechsten Potenzen darstellbar sind."

Erster Beweis.

Wir gehen vom Satze λ) aus. Eines der Quadrupel sei $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$. Dann ist die nothwendige und hinreichende Be-

dingung für seine Existenz, dass die drei Schnittpunktgleichungen:

(17) $\alpha_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0 \quad \beta_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0 \quad \gamma_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0$

sich auf eine reduciren, d. h. genauer, dass es noch eine ∞^1-lineare Schaar (Involution) von Paaren $\lambda_1 \lambda_2$ giebt, die diese Gleichungen befriedigt. Nennen wir die nach den δ polarisirten zweiten Differentialquotienten von α_λ „A_{00}, A_{01}, A_{02}", analog die von $\beta_\lambda, \gamma_\lambda$, so schreibt sich (17) auch so:

$$(18) \begin{cases} \sigma_0 A_{00} + \sigma_1 A_{01} + \sigma_2 A_{11} = 0 \\ \sigma_0 B_{00} + \sigma_1 B_{01} + \sigma_2 B_{11} = 0 \\ \sigma_0 \Gamma_{00} + \sigma_1 \Gamma_{01} + \sigma_2 \Gamma_{11} = 0 \end{cases}$$

oder auch
$$(18^a) \begin{cases} \varkappa A_{00} + \lambda B_{00} + \mu \Gamma_{00} = 0 \\ \varkappa A_{01} + \lambda B_{01} + \mu \Gamma_{01} = 0 \\ \varkappa A_{11} + \lambda B_{11} + \mu \Gamma_{11} = 0 \end{cases}$$

Dann muss es also auch ein ∞^1-lineares System von Werthsystemen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ geben, die (18^a) befriedigen.

Aber diese Gleichungen (18^a) sind, wie wir wissen, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass sich die Form

$$(19) \quad f \equiv \varkappa\alpha_\lambda + \lambda\beta_\lambda + \mu\gamma_\lambda$$

als Summe von den vier sechsten Potenzen $(\lambda - \delta_i)^6$ darstellen lässt.

Da es aber ein ∞^1-lineares System von Werthen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ giebt, so auch eine Involution von Formen (19) (d. h. der Gruppe 11), die die Form (16) annehmen.

Genau in der umgekehrten Weise beweist man die Umkehrung des Satzes.

q. e. d.

Zweiter Beweis.

Zuerst verfahren wir wie oben. Für ein Quadrupel des Satzes λ) $(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4)$ müssen die drei Schnittpunktgleichungen

$$(12)\quad \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0$$

wenn man für vier der sechs Elemente $\lambda_1 \ldots \lambda_6$ die δ einsetzt, sich auf eine reduciren d. h. man muss aus (12) drei solche Formen linear zusammensetzen können, so, dass zwei von ihnen für unsere Substitution identisch verschwinden.

Man bezeichne mit $\psi(\lambda)$ die Form

$$(20)\quad \psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_6).$$

Soll nun eine in den s_i lineare und ganze Funktion für irgend eine der Substitutionen $\delta_1 = \lambda_k$ $(k = 1 \ldots 6)$ verschwinden, so ist sie bekanntlich mit $\psi(\delta_1)$ identisch.

Soll sie verschwinden für die Substitutionen $\delta_1 = \lambda_k$, $\delta_2 = \lambda_{k'}$ $(k \gtrless k' = 1, 2 \ldots 6)$, so kann sie nur von der Form sein:

$$k_1\,\psi(\delta_1) + k_2\,\psi(\delta_2).$$

So fährt man fort. Soll sie endlich verschwinden, wenn man für irgend eines der λ setzt δ_1: für irgend ein zweites δ_2: ein drittes und viertes resp. δ_3, δ_4, so ist sie nothwendig von der Form:

$$(21)\quad \delta_s \equiv k_1\,\psi(\delta_1) + k_2\,\psi(\delta_2) + k_3\,\psi(\delta_3) + k_4\,\psi(\delta_4).$$

Somit giebt es für jedes Quadrupel $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4$ des Satzes λ) zwei (linear unabhängige) Formen der Gruppe (12) (und damit auch alle aus ihnen linear zusammensetzbaren), die die Gestalt (21) annehmen.

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_6$ gehen aber einerseits die Formen (12) in die zu (10) conjugirte Gruppe über, andrerseits die sämmtlichen Formen (21) in (16).

q. e. d.

In dieser Weise ist der Satz λ_3) eine Verallgemeinerung des Satzes pg. 293: cf. den ganz allgemeinen Satz Kap. III, für den der Beweis ganz analog ist, wie die beiden eben geführten.

Zwischen den sechs Quadrupeln (δ) findet ein einfacher Zusammenhang statt.

λ_4) Man kann irgend drei der sechs Quadrupel (δ) beliebig annehmen: dann sind die drei übrigen eindeutig bestimmt.

In der That, bei der schon öfters benützten Abbildung (der durch die R_6^3 gehenden F_3 auf die Ebene) gehen die sechs Quadrupel (δ) über in diejenigen, die die durch je fünf von sechs Punkten gehenden Kegelschnitte aus einem festen (Norm-) Kegelschnitt ausschneiden.

Nimmt man somit auf dem letzteren irgend drei Quadrupel an, so hat man drei Kegelschnitte durch sie so zu legen, dass sie drei Punkte gemein haben. Solcher Punktetripel giebt es aber nur eines, das die Doppelpunkte einer R_4^2 repräsentirt, deren Gruppe sich aus den drei gegebenen Quadrupeln linear zusammensetzt.

q. e. d.

199. Wenden wir diese Ergebnisse auf unsere aus Gebüsch L_2 und Schaarschaar M_2 bestehende Figur an, so haben wir nur noch zu bemerken, dass die einer Form δ_8 (21) entsprechende Fläche $\delta_\sigma^2 = 0$ und damit auch die zugehörige Klassenfläche $\Delta_u^2 = 0$ sich als Summe von vier zweiten Potenzen darstellen lässt, die $= 0$ gesetzt, die Gleichungen der vier Ebenen δ_i resp. der vier Punkte δ_i der Normcurve (N_3, N_3) sind. Dann gilt mithin nach Obigem der Satz:

λ_5) „Die sechs der Curve einbeschriebenen Tetraeder des Satzes λ_1) (die zugleich den gemeinsamen Grundcurven (vierter Ordnung) von sechs Büscheln des Gebüsches L_2 einbeschrieben sind), sind zugleich Polvierflache von sechs Schaaren der Schaarschaar M_2.

Drei dieser Tetraeder kann man der Curve beliebig einbeschreiben, dann ist unsere ganze Configuration dadurch eindeutig bestimmt."

Ganz analog dem Satze λ_3) (und seinen Beweisen) spricht (und beweist) man folgende Sätze über die conjugirten Gruppen M, L der R_6^2 und R_6^3 aus:

μ) I. „Jede Form der Gruppe M ist auf ∞^1 Arten als Summe von vier sechsten Potenzen darstellbar. Die diese Darstellung leistenden Quadrupel sind die sämmtlichen Elementenquadrupel der Gruppe L und zwar gehört zu jedem solchen Quadrupel nur eine Form M und eine Form L."

II. „Es giebt ∞^1 Formen der Gruppe M, die als Summen von drei sechsten Potenzen darstellbar sind. Die bezüglichen Elemententripel entsprechen den dreifachen Sekanten der R_6^3 d. h. denjenigen Involutionen der Gruppe L, die einen festen cubischen Factor haben.

Jedem solchen Tripel entspricht eine solche Involution der Gruppe L und eine bestimmte Form der Gruppe M."

III. „Es giebt ∞^2 Formen der Gruppe L, die als Summe von drei sechsten Potenzen darstellbar sind. Die bezüglichen Elemententripel sind die sämmtlichen Elemententripel der Gruppe M. Dieser letztere Satz ist nur der algebraische Ausdruck für die Existenz der Fläche F_4, der Jacobi'schen des Gebüsches L_3." etc.

Diese Sätze sind wieder ohne Weiteres in ihre geometrische Form zu kleiden z. B. Satz II. und I:

μ II) „Die Ebenen der in der Schaarschaar M_2 befindlichen Kegelschnitte umhüllen bekanntlich eine Curve sechster Klasse *).. Irgend eine

*) Diese ist also ein- eindeutig abgebildet auf die Curve vierter Klasse B (M) = 0, die aus der R_6^2 (11) diejenigen Sextupel ausschneidet, für

Schmiegungsebene derselben trifft die Curve N_3 in drei Punkten, durch die ein Büschel des Gebüsches L_2 geht und umg. Speciell ist diese Curve also den sechs Tetraedern des Satzes (λ_5) einbeschrieben.“ *)

μ I) „Geht durch vier Punkte der Curve N_3 eine Fläche des Gebüsches L_2, so ist ihr Tetraeder Polvierflach einer bestimmten Fläche der Schaar-schaar M_2 und umg.“ etc.

Die weiteren zahlreichen Anwendungen der R_6^2- und R_6^3-Gruppen auf unser Flächengebüsch L_2 seien dem Leser überlassen. Statt der Curve N_3 kann man natürlich immer auch die zweite auf L_2 ruhende cubische Curve substituiren.

Desgleichen mag auf die Untersuchung der vielen speciellen Arten von Jacobi'schen Flächen eines Flächengebüsches zweiter Ordnung verzichtet werden. Besonders treten hervor einmal das Gebüsch mit sechs gemeinsamen Grundpunkten, von dem man zur Hierholzer'schen[64] **) Fläche gelangt, und

welche die Invariante B (cf. Nr. 137) verschwindet. (Dualistisch gesprochen) kann man demnach die bekannte Hesse'sche Abbildung der Kegelspitzencurve eines Flächennetzes zweiter Ordnung auf eine ebene allgemeine Curve vierter Ordnung noch auf ∞^3 Weise so vollziehen, dass die letztere Curve eine „Curve B“ wird, da es noch ∞^3 cubische Curven giebt, die auf einem F_2-Netz ruhen.

*) Irgend dreien dieser Tetraeder kann man nach Satz pg. 221 eine bestimmte Fläche zweiter Klasse einbeschreiben. Dann sind die zwölf Ebenen der drei Tetraeder gerade diejenigen, die sie mit der Curve sechster Klasse gemein hat.

**) Haben die Flächen des Gebüsches (5) einen Punkt ($\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$) gemein, so sind andrerseits dies die Argumente einer dreifachen Tangente der R_6^2. Also ist das ebene Bild der Hierholzer'schen Fläche eine R_6^3 mit sechs dreifachen Tangenten, die 18 von den 24 Doppeltangenten der Curve absorbiren.

zweitens das Gebüsch der ersten Polaren einer Fläche dritter Ordnung, dessen Jacobi'sche Fläche mit ihrer Steiner'schen Kernfläche identisch ist. Nur der letzteren sei ein specieller Excurs gewidmet.

Dagegen möge noch Einiges über die Bestimmungsarten einer biquadratischen Involution, sowie ihre Erzeugung auf der cubischen Raumcurve am Schlusse unseres zweiten (Haupt-) Capitels Platz finden, um so die Theorie dieser Involution in gewisser Richtung abzuschliessen.

Excurs. 200. Wir behandeln hier die Grundlage einer Apolaritätstheorie der allgemeinen Fläche dritter Ordnung und ihrer Steiner'schen (Kern-)fläche.

Gehen wir vorerst von der Fläche dritter Ordnung aus. Diese ist bekanntlich nach Sylvester als Summe von fünf Cuben darstellbar (und nur in einer Weise):

$$(1)\quad F \equiv \Sigma k_i A_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei sind die Ebenen $A_i = 0$ die des „Pentaeders" der Fläche, dessen 10 Kanten auf der Steiner'schen Fläche von F (der Jacobi'schen ihres Polarengebüsches), deren Gleichung von der Gestalt ist:

$$(2)\quad S \equiv \Sigma \frac{k_i'}{A_i} = 0$$

liegen. Wir wählen irgend eine der (∞^2) Schaar von den dem Pentaeder einbeschriebenen cubischen Curven zur Normcurve N_3. Die Argumente der fünf Ebenen seien α_i. Dann kann man setzen:

$$(3)\quad A_i = s_3 - s_2\,\alpha_i + s_1\,\alpha_i^2 - s_0\,\alpha_i^3.$$

Dann ergiebt sich:

$$(4)\quad \frac{\delta F}{\delta s_r} = F_r = (-1)^r \sum_i k_i\,A_i^2\,\alpha_i^r \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

und die Bedingung für ein in Bezug auf $F_r = 0$ conjugirtes Punktepaar (σ, τ) lautet:

$$(5)\quad \sum_i k_i\, \alpha_i^r\, A_i(\sigma)\, A_i(\tau) = 0.$$

Geben von den Punkten σ, τ resp. die Ebenen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ an N_3 und setzt man

$$(6)\quad \psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda-\lambda_6)$$

so ist die Form (5) identisch mit:

$$(5)\quad \sum_i k_i\, \alpha_i^r\, \psi(\alpha_i) = 0.$$

Andererseits bestimmen wir die Schnittpunkte der Fläche F und ihres Polarengebüsches mit der Curve N_3. Es schneidet F die Curve in den neun Punkten:

$$(6)\quad f = \Sigma\, k_i\, (\lambda-\alpha_i)^9 = 0$$

und ihr Polarengebüsch in dem Sextupelgebüsch der Gruppe:

$$(7)\quad f_r = \Sigma\, k_i\, \alpha_i^r\, (\lambda-\alpha_i)^6 = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3).$$

I. „Die Gruppe (7) ist keine andere als die der dritten Polaren der Form (6). Aus ihnen geht durch Polarisation nach sechs Elementen λ die Gruppe (5) hervor. Diese ist das Schnittpunkttheorem einer R_6^2 mit dem fünffachen Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Daher stützt eine Fläche dritter Ordnung F jede ihrem Pentaeder einbeschriebene cubische Raumcurve und umgekehrt ruht eine gegebene cubische Curve auf der ganzen (∞^4 linearen) Schaar von Flächen dritter Ordnung (1), die ein gegebenes der Curve umschriebenes Pentaeder zu ihrem „Pentaeder" haben. Die zehn Kanten des Pentaeders sind die gemeinsamen Axen aller (∞^2) ihm einbeschriebenen cubischen Curven. Durch diese zehn Geraden geht noch eine ∞^4 lineare Schaar von Flächen vierter Ordnung S, von denen jede die Steiner'sche Fläche einer bestimmten der Flächen F ist."

Dies fliesst unmittelbar aus den Entwicklungen der letzten Nummern.

Eine weit grössere Wichtigkeit hat aber die Umkehrung unseres Verfahrens, indem man von einer R_6^2 mit fünffachem Punkt (α_1) ausgeht. Da ein solcher drei Bedingungen erheischt, so kann das Schnittpunkttheorem dann nur noch von $12 - 3 = 9$ Constanten abhängen, also ausser den α noch von vier.

In der That, verfährt man wie in Nr. 198, so gelangt man zu folgender Form des Schnittpunkttheorems:

(8) $\Sigma\, a_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, b_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, c_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, d_i\, \psi(\alpha_i) = 0$

mithin die Gruppe ihrer Schnittpunktformen:

(9) $\Sigma\, a_i\, (\lambda-\alpha_i)^6, \quad \Sigma\, b_i\, (\lambda-\alpha_i)^6, \quad \Sigma\, c_i\, (\lambda-\alpha_i)^6, \quad \Sigma\, d_i\, (\lambda-\alpha_i)^6.$

II. „Diese Gruppe (9) ist die Gruppe der dritten Polaren einer bestimmten Form neunten Grades

$$(6)\; f \equiv \Sigma\, k_i\, (\lambda-\alpha_i)^9 \equiv k_\lambda^9.$$

Enthält daher eine dreigliedrige Gruppe sechster Ordnung eine Involution mit einem festen Faktor fünfter Ordnung, so ist die conjugirte Gruppe durch die nach drei variabeln Constanten μ_1, μ_2, μ_3 polarisirte Form einer bestimmten Form neunten Grades (6):

$$(7)\; k^6_{\lambda\, \mu_1\, \mu_2\, \mu_3} = 0$$

dargestellt."

Wir haben nun den ersten Theil des Satzes zu beweisen, da der zweite nur der daraus folgende algebraische Ausdruck der Existenz des fünffachen Punktes der R_6^2 ist.

Die Gruppe (9) hängt ausser von den α nur von den (vierreihigen) Determinanten der Coefficienten a_i, b_i, c_i, d_i ab. Diese seien mit K_i bezeichnet. Sollen diese identisch sein mit den bezüglichen Determinanten der Gruppe (7), so ergeben sich die Bedingungen:

$$(10) \quad \rho K_i = \frac{D_i}{k_i} \text{ (ρ ist ein beliebiger Faktor).}$$

Dabei sind die D_i die Differenzenprodukte derjenigen vier α, die den Index i nicht aufweisen.

Setzt man also voraus, dass weder eines der K noch eines der k verschwinden darf, so bestimmen die Grössen der einen Art eindeutig die der andern und umgekehrt. q. e. d.

Dann ist aber auch das Gebüsch (4) und damit die Fläche F eindeutig bestimmt, deren Steiner'sche Fläche (2) die F [illegible] Fläche der R_6^2 wird, wo die Coefficienten k_i' mit den K_i in (10) identisch sind.

III. „Bekanntlich ist aber eine allgemeine binäre Form f neunten Grades stets und zwar nur auf eine Weise als Summe von fünf neunten Potenzen $\{(\lambda - \alpha_i)^9\}$ darstellbar. Dabei sind die α_i die Wurzeln ihrer (Sylvester'schen) Canonizante.

Andererseits geht durch irgend neun Punkte einer cubischen Curve (N_3) stets nur eine Fläche dritter Ordnung F, die die Curve stützt."

In der That überzeugt man sich sofort, dass die letztere Eigenschaft einer Fläche dritter Ordnung zehn (in den Coefficienten lineare) Bedingungen erfordert und wir wissen zugleich aus Früherem, dass wenn die neun gegebenen Punkte durch eine Form $a_\lambda^9 = 0$ dargestellt sind, die zugehörige Fläche keine andere ist als

$$(11) \quad F = a_{\lambda_1^3 \lambda_2^3 \lambda_3^3} = 0.$$

Und genau wie in Nr. 137 folgt dann die Reihe von Sätzen:

IV. „Die zur Gruppe der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Polaren von f apolare Gruppe stellt resp. die ∞^8, ∞^6, ∞^4, ∞^2, ∞^0 (lineare) Schaar der der Curve umschriebenen Polneun-acht-sieben-sechs-fünfflache der Fläche dritter Ordnung F (11) dar.

Im letzten Fall giebt es nur *ein* Polfünfflach, „das Pentaeder" von F."

Speciell mit Rücksicht auf das letztere folgt dann aus der Art der obigen Umformung unserer Formeln der merkwürdige Satz:

V. „Die Sylvester'sche Canonization der quaternären (ganzen) Form dritten Grades (d. h. ihre Darstellung als Summe von fünf Cuben) ist *vollkommen identisch* mit der Sylvester'schen Canonization der binären Formen neunten Grades (d. h. ihrer Darstellung als Summe von fünf neunten Potenzen)."

Denn dass die erstere Darstellung auch auf unserem Wege sich nur als eine einzige ergiebt, folgt indirekt sofort. Denn im andern Falle wäre auch die zweite Darstellung eine mehrdeutige, was, wie auch aus dem Satze IV. hervorgeht, unmöglich ist.

Dies mag genügen, um die Bedeutung des Apolaritätsstandpunktes auch für die Flächen dritter Ordnung erkennen zu lassen. Die mancherlei weiteren neuen Eigenschaften, die aus der Übertragung der R_6^2-Sätze auf diese Flächen resultiren, mögen unberücksichtigt bleiben.

201. Wir haben uns die Involution ursprünglich durch zwei Quadrupel gegeben gedacht, d. h. wir nahmen zwei der Curve N_3 (φ) umschriebene Tetraeder an, die dann nebst noch unendlich vielen andern einer bestimmten Hurwitz'schen H_3-Curve einbeschrieben waren.

Diese Involutionsquadrupel sind leicht durch ein Flächenbüschel auszuschneiden. Man nehme eine beliebige Raumebene an. Diese trifft die beiden N_3 umschriebenen Tetraeder in je vier Geraden. Dann giebt es je einen Kegelschnitt, der die vier Geraden und die eine in der Ebene liegende Curvenaxe

berührt. Diese beiden Kegelschnitte bestimmen dann eine Schaar.

ν_1) „Jeder Kegelschnitt dieser Schaar wird (ausser von zwei festen) von vier beweglichen Curvenebenen berührt. Diese bestimmen die Quadrupel der Involution" (u. dual.).

In der That bestimmen die zwei Kegelschnitte (die selbst in der angenommenen Ebene durch die zwei Ebenenquadrupel von N_3 bestimmt sind) ihre Schaar gerade so, wie diese Quadrupel ihre Involution. q. e. d.

Man erhält aber eine noch einfachere Construktion, wenn man die Involution durch drei ihrer Elemententripel bestimmt sein lässt.

Es gilt nemlich der Satz:

ν_2) „Durch irgend drei Raumpunkte $P_1 P_2 P_3$ geht eine einzige H_3-Curve einer gegebenen cubischen Curve φ. Die φ um- und ihr einbeschriebenen Tetraeder erhält man so.

Man verbinde die drei gegebenen Punkte durch Geraden $p_1 p_2 p_3$: die in ihrer Ebene liegende Axe (von φ) sei a, ihre Ebenen an φ α_1, α_2.

Dann bilden die Quadrupel von Ebenen von φ, die (ausser den festen Ebenen α_1, α_2) die Kegelschnitte *der dem Vierseit* $p_1 p_2 p_3 a$ *einbeschriebenen* Schaar berühren, die gewünschten Involutionstetraeder" (u. dual.).

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich. Jeder Kegelschnitt der Schaar wird von sechs Ebenen der Curve φ berührt, von denen aber zwei immer die festen Ebenen α_1 α_2 sind.

In der Schaar existiren drei zerfallende Kegelschnitte, die drei Paar Gegenecken des Vierseits (a p_1 p_2 p_3). Jedes

Paar besteht aus einem Punkte P_1 und dem Schnittpunkt von a und p_1.

Mithin sind die von den Punkten P_1 an φ gehenden Ebenentripel in der That Elemententripel der Involution. Und die ein solches Tripel (P_1) zum Quadrupel der Involution ergänzende vierte Ebene von φ ist die dritte (ausser α_1, α_2) vom Punkte ($a\, p_1$) an φ gehende Ebene. *q. e. d.*

202. Diese Bestimmungsart der Involution ist aber nur ein weiterer besonderer Fall: alle überhaupt möglichen Fälle sind mit den zugehörigen Anzahlen von Involutionen in folgender Tabelle enthalten, wo die Paare, Tripel etc. die gegebenen Elementenpaare, -Tripel etc. der Involution bedeuten:

(22)

Anzahl	Paare	Tripel	Quadrupel
5	6		
3	4	1	
1	3		1
2	2	2	
1	1	1	1
1		3	
1			2

Dabei unterliegen die Anzahlen m_1 der Paare, m_2 der Tripel, m_3 der Quadrupel offenbar der Bedingung:

$$(23)\quad m_1 + 2\, m_2 + 3\, m_3 = 6\,{}^{*}).$$

Die Fälle, in denen kein Quadrupel auftritt, leiten sich

*) Genau dieselbe Bedingung galt für m_1 Sechs- m_2 Fünf- m_3 Vierflache, die einer cubischen Curve umbeschrieben waren, wenn sie Polvielflache einer (dann bestimmten) die Curve stützenden F'_2 sein sollten.

ohne Weiteres aus dem ersten ab, indem man als Bild die R_6^2 zu Grunde legt und immer drei Doppelpunkte (was man sich durch einen continuirlichen *) Process vorstellen kann) durch einen dreifachen Punkt ersetzt.

Die Fälle mit Quadrupel leiten sich aus dem Verfahren des Beweises zu den Sätzen ν) mit Leichtigkeit ab.

Für den zweiten und vierten Fall gilt dann noch als Modification des Hauptsatzes (pg. 247):

π) „I. Die drei Involutionen mit gemeinsamen 4 Paaren und 1 Tripel haben noch zu je zweien zwei weitere Paare miteinander gemein nach dem Schema

1.	φ_2	φ_3	φ_{21}	φ_{31}
2.	φ_1	φ_3	φ_{21}	φ_{32}
3.	φ_1	φ_2	φ_{31}	φ_{32}

zusammen also 3. 2 weitere Paare**).

II. Die zwei Involutionen mit gemeinsamen 2 Paaren und 2 Tripeln haben noch ein einziges weiteres Elementenpaar gemein."

Die Modificationen, die die Fläche F_4 dadurch erhält, sind leicht angebbar und mögen unterlassen werden.

---

*) Der umgekehrte Weg ist leichter zu erkennen. Eine R_6^2 mit drei dreifachen Punkten ist dargestellt durch:

$$\begin{cases} \rho x_0 = (\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)(\lambda-\beta_3)(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)(\lambda-\gamma_3) = \varphi_0 \\ \rho x_1 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)(\lambda-\gamma_3) = \varphi_1 \\ \rho x_2 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)(\lambda-\beta_3) = \varphi_2 \end{cases}$$

Setzt man nun etwa succ. in φ_0 für β_3: $(\beta_3 + \varepsilon_2)$: für γ_3 $(\gamma_3 + \varepsilon_3)$ und in φ_1 für α_2 : $(\alpha_2 + \varepsilon_1)$, wo die ε beliebig kleine Grössen sind, so lösen sich die drei dreifachen Punkte succ. in je drei Doppelpunkte auf.

**) Für eine solche R_6^2 reduciren sich die vier T-Processe T_i (cf. pg. 246) auf einen, durch den nur die φ_i in die φ_{kl} übergehen und umgekehrt.

Desgleichen unterbleibe die Uebertragung aller für die cubischen Raumcurven gewonnenen Sätze auf die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie in §. 26 prinzipiell erörtert wurde, da im Wesentlichen keine neuen Resultate dabei erscheinen würden.

Damit ist die systematische Vorarbeit dieses Capitels, die eine künftige Darstellung der Verknüpfung der Apolaritätsverhältnisse in Räumen von beliebig hohen Dimensionen ermöglichen sollte, prinzipiell *) durchgeführt und es sollen im folgenden dritten Capitel nur noch die Grundlinien dieser künftigen in sehr allgemeinen Sätzen sich ergehenden Theorie angedeutet werden, indem eine Anzahl der wichtigsten Verallgemeinerungen der in diesem Werke untersuchten Beziehungen (zum Theil ganz ohne Beweis, um nicht zu weit auszuholen) formulirt werden soll, wenigstens mit Angabe der in diesem Werke an der betr. Stelle angewandten ganz analogen Methoden.

---

*) Es ist keine Frage, dass sich im Einzelnen noch viele Lücken befinden. So z. B. ist die Invariantentheorie der binären Form sechsten Grades erst zum kleinsten Theile verwerthet: so ist von der äusserst wichtigen Frage (von der nur ein besonderer Fall pg. 330 Anm. untersucht ist), wann eine biquadratische Involution durch sechs Elementenpaare (oder überhaupt durch sechs Bedingungen) noch nicht bestimmt ist, d. h. es ihrer noch unendlich viele giebt wie z. B. wenn die sechs gegebenen Elementenpaare die Argumentenpaare der Doppelpunkte einer R_5^2 sind, Umgang genommen.

Dass die Theorie der R_6^2 und R_6^3 zusammenfällt mit der Betrachtung der drei- und viergliedrigen Gruppen sechster Ordnung auf der Normcurve sechster Ordnung (im Raume von sechs Dimensionen), aus der durch geeignete Projektion in den gewöhnlichen Raum und die Ebene (ganz wie in Nr. 110, 111) die R_6^2 und R_6^3 entstehen, braucht wohl nur angegeben zu werden.

Capitel III.
Verallgemeinerungen.

§. 33.
Der Satz über die linearen Identitäten zwischen den gleich hohen Potenzen binärer Formen.

203. Dieses Capitel möge als ein Anhang betrachtet werden, der sich zur Aufgabe setzt, einige Ausdehnungen von im zweiten Capitel gegebenen Entwicklungen darzulegen und damit zugleich die Ziele zu bezeichnen, wie sie in einer „allgemeinen Apolaritätstheorie der Normcurven“, die ich später herauszugeben gedenke, verwirklicht werden sollen. Es stellt sich dabei immer mehr als leitendes Princip heraus, eine oder mehrere algebraische Formen in vorgeschriebene canonische Formen (Potenzensummen etc.) zu bringen.

Die geometrischen Ausdrücke aus der Theorie der Räume von d Dimensionen (spec. Apolaritätsausdrücke) sind nach den früheren Definitionen so einfach zu verstehen, dass sie kaum erläutert zu werden brauchen. So z. B. trägt (stützt) in einem solchen Raume eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n ($a_x^n = 0$) eine (Norm-)Curve d^{ter} Ordnung (und Classe) ($\rho x_i = m_i \lambda^i, i=0,1,\dots d$) wenn sie alle der Curve umschriebenen Flächen zweiter Classe ($u_\alpha^2 = 0$) stützt, und dies ist wieder der Fall, wenn die letzteren auf allen Polarflächen zweiter Ordnung der Fläche F_n (d. h. den Flächen $a^2_{x\, x_1\, x_2 \dots x_{n-2}} = 0$) ruhen (d. h. ihre bilinearen Invarianten verschwinden). etc. etc.

Die erste Erweiterung erfahre der Potenzen-Satz der pg. 330. Sie lautet zunächst:

α) „Durch „$d+1$“ binäre Formen d^{ter} Ordnung

sind stets (im Allgemeinen) $2^d - (d+1) = \delta$ weitere solche Formen in eindeutiger Weise bestimmt von der Art, dass nicht nur zwischen den sämmtlichen 2^d Formen (wie bekannt), sondern auch zwischen ihren *Quadraten* δ lineare Identitäten stattfinden."

Oder in geometrischer Redeweise:

α_1) „Durch „$d+1$" Punkte im Raume von d Dimensionen sind stets (im Allgemeinen) $2^d - (d+1) = \delta$ weitere (in eindeutiger Weise) bestimmt, die mit den ersteren die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar von Flächen zweiter Ordnung F_2 bilden, die alle eine gegebene Curve d^{ter} Ordnung (von nicht specieller Natur) stützen."

„Bezieht man die Punkte auf diese Curve als Normcurve (des bezüglichen Raumes), so ist jeder durch eine binäre Form d^{ter} Ordnung dargestellt. Dann sind die Darstellungsformen der „$d+1$" resp. der δ weiteren Punkte gerade die Formen des Satzes α)."

Der Beweis führt sich genau wie dort.

Dass nicht etwa schon zwischen den Quadraten der beliebig gegebenen „$d+1$" Formen lineare Identitäten stattfinden, sieht man am besten aus der geometrischen Auffassung, da sonst durch die gegebenen $d+1$ Punkte eine höhere als ∞^{d-1} Schaar von F_2 der verlangten Art gehen müsste, was unmöglich ist.

204. Frägt man in analoger Weise nach dem entsprechenden noch allgemeineren Satze für die Identitäten zwischen den p^{ten} Potenzen binärer Formen, so ergiebt sich als Antwort *):

*) Dies sind dann auch offenbar alle linearen Identitäten zwischen

β) „Durch beliebig gegebene „$pd - (d-1)$“ binäre Formen d^{ter} Ordnung sind stets (im Allgemeinen) $p^d - \{pd - (d-1)\} =$

$(p-1)^2 \{1\,p^{d-2} + 2\,p^{d-3} + 3\,p^{d-4} + \ldots (d-1)\,p^0\} = \delta$ weitere solche Formen in eindeutiger Weise und der Art bestimmt, dass zwischen den p^{ten} Potenzen der sämmtlichen p^d Formen δ lineare Identitäten herrschen.“

Oder geometrisch:

β_1) „Durch beliebig gegebene „$pd - (d-1)$“ Punkte im Raume von d Dimensionen sind stets (im Allgemeinen) δ weitere (in eindeutiger Weise) bestimmt, die mit den ersteren die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar von Flächen p^{ter} Ordnung F_p bilden, die alle eine gegebene Curve d^{ter} Ordnung (die nur nicht von spezieller Natur sein darf) stützen. Die Darstellungsformen der „$pd - (d-1)$“ resp. der δ weiteren Punkte sind gerade die des Satzes β).“

Auch hier ist die Beweismethode eine der damals entwickelten ganz analoge: sie möge jedoch an einem einfachen Beispiel recapitulirt werden. Es sei $d = 2$, $p = 3$, also $pd - (d-1) = 5$, $\delta = p^d - 5 = 9 - 5 = 4$.

Demnach seien gegeben irgend fünf quadratische binäre Formen:

$$(1) \quad \varphi_0\ \ \varphi_1,\ \ \varphi_2,\ \ \varphi_3,\ \ \varphi_4,$$

dann bilden ihre Cuben eine fünfgliedrige Gruppe sechsten Grades. Statt dieser substituiren wir vorerst eine ganz all-

n^{ten} Potenzen binärer Formen, die es im Allgemeinen überhaupt giebt, d. h. solange den Formen keine speciellen Bedingungen auferlegt werden.

gemeine solche Gruppe (einer R_6^4), die aus den Formen sechsten Grades

$$(2)\ \chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4$$

linear constituirt sei. Eine Form sechsten Grades gehört dann der Gruppe (2) an, wenn ihre Wurzeln $(\lambda_1\,\lambda_2\,.\,.\,.\,\lambda_6)$ dem Schnittpunkttheorem der R_6^4 (2):

$$(3)\ a_s = 0,\ \ b_s = 0$$

genügen. Nun erhält man die in der Gruppe (2) enthaltenen vollständigen Cuben *), wenn man in (3) je drei und drei der λ gleichsetzt:

$$(4)\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1\,;\ \ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_2.$$

Dadurch gehen die Formen (3) über in:

$$(5)\ a_\sigma^3 = 0,\ \ b_\sigma^3 = 0, \text{ oder } a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0,\ \ b_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0, \text{ wo}$$

$$(6)\ \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \mu_1 + \mu_2,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \mu_1\,\mu_2$$

und die Gleichungen (5) ein Büschel von Curven dritter Ordnung (in irgend einer Ebene) darstellen, die alle einen Normkegelschnitt der Ebene stützen.

Die Grundpunkte des Büschels (5), auf den Normkegelschnitt bezogen, stellen die neun quadratischen Formen dar, deren Cuben der Gruppe (2) angehören. Diese ist aus irgend fünf der neun Cuben zusammensetzbar, dann besteht zwischen ihnen und jedem der vier weiteren Cuben eine lineare Identität, mithin zwischen den neun Cuben vier solche Identitäten.

Umgekehrt nehme man als die ersteren fünf Cuben diejenigen der fünf beliebigen Formen (1): dann sind durch sie die vier weiteren eindeutig bestimmt.

Würde aber schon zwischen den Cuben der Formen (1) eine (resp. mehrere) lineare Identitäten herrschen, so erhielte

---

*) D. h. also diejenigen Lineargebilde $a_x = 0$, die die R_6^4 an zwei Stellen osculiren.

man in diesem Falle statt der zwei Schnittpunktgleichungen (3) drei resp. mehrere, sodass die bez. Curven dritter Ordnung (5) mindestens ein Netz bilden würden. Da es aber nur ein Büschel von solchen geben kann, die durch fünf beliebige Punkte der Ebene gehen und einen Kegelschnitt stützen, so ist die gemachte Annahme unmöglich, und der Beweis vollständig erbracht*).

Irgend ein gemeinsames Poldreieck des Curvenbüschels dritter Ordnung (5) stellt (auf den Normkegelschnitt bezogen)

---

*) Die linearen Identitäten zwischen den neun quadratischen Darstellungsformen der Grundpunkte des Curvenbüschels dritter Ordnung (5) sagen unmittelbar noch eine andere Eigenschaft dieser Punkte aus.

Greift man nemlich irgend sechs derselben heraus (deren Gleichungen $U_i = 0$ seien), so ist die ∞^5 Schaar von Curven dritter Klasse K_3, für die die Punkte ein Polsechseck bilden, dargestellt durch:

$$\Sigma\ k_i\ U_i^3 = 0$$

und die ihr mit dem Normkegelschnitt N_2 gemeinsame Tangentenschaar durch:

$$\Sigma\ k_i\ \varphi_i^3 = 0$$

wo die φ die bezüglichen Darstellungsformen der sechs Punkte sind. Da aber zwischen je sechs unserer neun Darstellungsformen eine bestimmte lineare Identität stattfindet, so gilt:

„Wenn ein Kegelschnitt auf einem Curvenbüschel dritter Ordnung ruht, so gehört zu je sechs der neun Büschelgrundpunkte immer ein bestimmter Punkt der Ebene, der mit dem Kegelschnitt eine solche Curve dritter Klasse bildet, dass die sechs Punkte ein *Polsechseck* derselben bilden."

Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass für ein beliebig gegebenes Curvenbüschel dritter Ordnung kein auf ihm ruhender Kegelschnitt existirt, sondern dass eine bestimmte Combinante (dritten Grades) des Büschels verschwinden muss, wenn dies eintreten soll.

Der eben angegebene Satz ist ohne Weiteres auch für den allgemeinsten Fall des Satzes β (β_1) auszusprechen, was dem Leser überlassen bleibe.

eine Form sechsten Grades dar, die der Gruppe der fünf Cuben von (1) und damit der neun Cuben der Darstellungsformen der Grundpunkte des Büschels angehört. Vier Wurzeln einer solchen Form ($\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$) kann man beliebig annehmen: dann sind die beiden andern eindeutig bestimmt. Man hat nur die linearen Polaren des Punktepaares ($\lambda_1\lambda_2$) ($\lambda_3\lambda_4$) in Bezug auf irgend zwei Curven des Büschels zu construiren: ihr Schnittpunkt ($\lambda_5\ \lambda_6$) liefert die beiden Restwurzeln.

Zum Beweise des allgemeinen Satzes genügt es, noch anzugeben, erstens, dass die Zahl der Constanten einer F_p, die (in einem Raume von d Dimensionen) eine Curve d^{ter} Ordnung (N_d) stützt, gleich pd ist, denn durch irgend welche pd Punkte auf solcher Curve

$$(7)\ f \equiv a_\lambda^{pd} = 0$$

geht nur eine einzige die Curve stützende F_p: (cf. Nr. 112)

$$(8)\ F \equiv a_{\lambda_1^p\ \lambda_2^p \cdots \lambda_d^p} = 0;$$

zweitens, dass sich im Raume von d Dimensionen d Flächen p^{ter} Ordnung F_p in p^d Punkten treffen, die dann die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar bilden.

Daher kann man gerade „$pd - (d-1)$" Formen d^{ter} Ordnung ganz beliebig wählen: dann ist alles Übrige dadurch bestimmt.

Das Produkt der Darstellungsformen von p Punkten bildet dann und nur dann eine Form der durch die p^d Formen des Satzes β) gebildeten Gruppe, wenn sie ein Pol-p-eck der ∞^{d-1} Flächenschaar p^{ter} Ordnung bilden.

Weitere Eigenschaften dieser Configuration erhält man, wenn man den allgemeinen „Stützsatz", der bald zur Sprache kommen wird, auf sie anwendet.

Bezeichnet man die Zahl der gegebenen binären Formen des Satzes β) mit g, so ist:

$$(9)\ p = \frac{g-1}{d} + 1,\ d = \frac{g-1}{p-1}.$$

Demnach kann man ausser der Zahl g noch die Zahl p resp. d ganz beliebig annehmen, vorausgesetzt, dass $g-1$ den Faktor $p-1$ resp. d enthält. Ist das eine der Fall, so auch das andere und umg. Die Zahlen p und d kann man selbstverständlich vertauschen.

§. 34.

Der Satz über die canonische Form der „Untergruppen" von Gruppen binärer Formen.

205. Vorangeschickt werden zwei Definitionen:

a) Ist irgend eine g-gliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung (von binären Formen n^{ter} Ordnung) gegeben, und seien irgend welche k ($k \leq g$) linear unabhängige Formen derselben:

$$(1)\ \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_k,$$

so heisse die aus diesen zusammengesetzte Gruppe „eine k-gliedrige Untergruppe" der gegebenen.

b) Die bekannte Bezeichnung „∞^m Schaar" für eine Schaar (von Elementen), deren Mannigfaltigkeit eine m-fach ausgedehnte ist (so dass ∞^0 eine endliche ganze positive Zahl bedeutet), soll auch auf den Fall eines negativen ganzen m ($m = -m'$) ausgedehnt werden. Dann bedeutet eine ($\infty^{-m'}$ Schaar) Schaar von Grössen (Formen, Bedingungen, Eigenschaften etc.), dass m' Bedingungen erforderlich sind, damit solche Grössen (und dann in endlicher Anzahl) existiren. So z. B. hat das Gleichungssystem:

$$(2)\ \sum_r a_{ir}\, x_r = 0\ (r = 1, \ldots 4,\ i = 0, 1, 2)$$

im Allgemeinen ein Lösungssystem (d. h. eine ∞^0 Schaar) der (homogenen) Unbekannten x: dagegen das dazu reciproke:

$$(3)\ \sum_i a_{ir}\, y_i = 0$$

eine (∞^{-2} Schaar) Schaar von Werthsystemen y, da das Ver-

schwinden der vollständigen Determinanten des Systems (3) (was zwei Bedingungen aequivalent ist) erforderlich ist, wenn eine Lösung der Gleichungen (3) vorhanden sein soll.

Dann lautet unser allgemeinster (umkehrbarer) Satz über solche k-gliedrige Untergruppen einer $(d+1)$-gliedrigen Gruppe von binären Formen n^{ter} Ordnung, die sämmtlich μ lineare Faktoren $(\lambda-\delta_1)(\lambda-\delta_2)\ldots(\lambda-\delta_\mu)$ $(\mu=1, 2, \ldots n-1)$, wo die δ als verschieden von einander vorausgesetzt werden, gemein haben, der also als Ausdehnung der Sätze Nr. 177, 198 zu betrachten ist (cf. auch pg. 21), folgendermassen (wobei die vier Zahlen n, d, k, μ, abgesehen von den evidenten Ungleichheiten unter ihnen, ganz willkürlich sind):

γ_1) „Die Mannigfaltigkeit einer solchen Untergruppe ist

(4) $m=k(d+1-k)-\mu(k-1)=k\,d-(k+\mu)(k-1)$.

γ_2) Dann gehört zu jeder solchen k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen in ein-eindeutiger umkehrbarer Weise eine Gruppe von

$$(5)\quad p=\mu-d-1+k$$

Formen, die eine p-gliedrige Untergruppe der $(n-d)$-gliedrigen zur gegebenen $(d+1)$-gliedrigen conjugirten Gruppe darstellt und folgende Eigenthümlichkeit besitzt.

Jede Form dieser p-gliedrigen Untergruppe lässt sich in der canonischen Gestalt schreiben

$$(6)\quad \sum_1^\mu x_i\,(\lambda-\delta_i)^n$$

wo die δ die obigen, die x wechselnde Coefficienten sind.“

Damit ist das Problem der Auffindung solcher gemeinsamen Faktoren auf ein Problem der Canonizirung binärer Formen spec. ihrer Darstellung als Summen von n^{ten} Potenzen zurückgeführt.

Ist m negativ, so involvirt die Darstellung (6) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die k-gliedrige Untergruppe der gegebenen einen festen Faktor μ^{ter} Ordnung besitzt.

Ist die zur gegebenen conjugirte Gruppe dargestellt durch

$$(7) \quad a_\lambda, b_\lambda, \ldots (n-d)_\lambda$$

so wissen wir, dass eine Form f dann der gegebenen Gruppe angehört, wenn ihre Wurzeln den Gleichungen

$$(8) \; a_s = 0, \; b_s = 0, \ldots (n-d)_s = 0$$

genügen.

γ_3) „Dann zieht jede p-gliedrige Untergruppe (der zur gegebenen conjugirten) der Gestalt (6) eine p-gliedrige Untergruppe der Gruppe (8) nach sich (und umg.), deren sämmtliche Individuen die Gestalt besitzen:

$$(9) \quad \sum_1^{\mu} x_i \, \psi(\delta_i) = 0, \text{ wo}$$

$$(10) \quad \psi(\lambda) \equiv (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$

und die x und die δ die obigen sind.“

Um den Inhalt der Sätze auch geometrisch auszudrücken, sagen wir: „Die Punkte x unseres Raumes von d Dimensionen, die eine Gleichung $a_x = 0$ befriedigen, erfüllen ein Lineargebilde $(d-1)^{ter}$ Dimension (Stufe)“: solche, die k Gleichungen $a_x = 0, b_x = 0 \ldots k_x = 0$ befriedigen, erfüllen ein „Lineargebilde $(d-k)^{ter}$ Dimension“. Dann haben wir:

γ_4) „Es giebt immer eine ∞^m Schaar von Lineargebilden $(d-k)^{ter}$ Dimension, die mit der rationalen Curve R_n^d

$$(11) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 0, 1, \ldots d)$$

(wo die φ die gegebene Gruppe bilden) μ Punkte

gemein haben. Deren Argumente (auf der Curve) bestimmen sich durch die Gleichungen (9)."

206. Zum Beweise haben wir vorerst die Formeln (4) (5) nachzuweisen: dazu dient der schon von Grassmann[65] erkannte Hülfssatz: „Ein Lineargebilde $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension (im Raume von d Dimensionen) hängt von $k(d+1-k)$ Constanten ab."

In der That hängen k Gleichungen der Form

$$(12)\quad a_x = 0,\ b_x = 0, \ldots k_x = 0$$

von kd Constanten ab: da das Lineargebilde aber nur von der „Gruppe" dieser Gleichungen abhängt, so kann man statt jeder eine beliebige lineare Combination aller einführen, was $k^2(k-1)$ willkürliche (nicht homogene) Constanten involvirt, durch die ebenso viele der ursprünglichen zum Verschwinden gebracht werden können. q. e. d.

Diese Constantenanzahl des Lineargebildes (12) ist offenbar zugleich die Mannigfaltigkeit einer k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen $(d+1)$-gliedrigen (11) überhaupt d. h. also wenn $\mu = 0$ ist.

Soll diese Untergruppe einen gemeinsamen Faktor μ^{ter} Ordnung haben d. h. soll das Lineargebilde mit der Curve R_n^d (11) μ Punkte gemein haben, so zählt dies für jeden solchen Punkt $(k-1)$ Bedingungen, mithin für alle μ „$\mu(k-1)$". Damit ist aber Formel (4) erhärtet.

Die Formel (5) beweisen wir zunächst für den Fall $k=1$.

Da ein Gebilde $u_x = 0$ die Curve R_n^d immer in $n = \mu + (n-\mu)$ Punkten trifft, so kann man aus den $n-d$ Schnittpunktgleichungen (8) immer $n-d-(n-\mu) = \mu - d$ linear unabhängige so auswählen, dass sie durch Einsetzen der μ Argumente $\mathfrak{z}_\mu$ für irgend μ der n Elemente λ identisch erfüllt werden: dann verbleiben noch $n-\mu$ Restgleichungen, die gerade ausreichen, um die fehlenden $n-\mu$ Restargumente zu berechnen. q. e. d.

Gehen wir zum nächsten Fall $k = 2$ über, so geht jetzt durch die μ Punkte δ_μ (der R_n^d) noch eine ∞^1 (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$: daher kann man von den $n-\mu$ Restpunkten (Restargumenten) noch einen willkürlich annehmen: erst dann sind die übrigen eindeutig bestimmt. Diese Willkürlichkeit des einen Argumentes hat zur Folge, dass ausser den $\mu - d$ ausgewählten Gleichungen noch eine weitere (linear von jenen unabhängige) identisch verschwindet.

Endlich, wenn k allgemein, giebt es noch eine ∞^{k-1} (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$, die die μ Punkte δ_μ aus der Curve ausschneiden: von den $n-\mu$ Restargumenten sind noch $k-1$ ganz willkürlich und es lassen sich somit aus den $n-d$ Schnittpunktgleichungen $(\mu-d) + (k-1)$ identisch verschwindende (und linear unabhängige) auswählen. Damit ist die Formel (5) abgeleitet.

Es ist besonders erwähnenswerth, dass „beide Formeln (4) (5) von n d. i. der Ordnung der binären Formen φ (11) ganz unabhängig sind“.

Dass aber in der That die so ausgezeichnete p-gliedrige Untergruppe der zur gegebenen conjugirten (7) sich in der Gestalt (6) schreiben lässt, beweist man genau wie damals beim „zweiten“ Beweise (pg. 335).

207. Da (cf. pg. 334) aber der „erste“ Beweis instruktiver erscheint, so mögen hier die beiden Hauptmomente desselben in allgemeiner Form betont werden. Mit Hülfe ihrer erledigt sich der Beweis selbst sehr rasch.

Erstes Hauptmoment. Wir gingen damals von den Lösungssystemen h linearer Gleichungen mit v homogenen Unbekannten $(v > h)$ über zu denjenigen v linearer Gleichungen mit h homogenen Unbekannten, deren Coefficientenmatrix sich von der der h Gleichungen nur durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen unterschied. Und zwar sind dabei der Reihe nach die Fälle zu unterscheiden, wo nicht alle vollständigen

Determinanten (Kerne) der Matrix, zweitens, wo zwar diese, aber nicht **alle** ersten Unterdeterminanten (Unterkerne) verschwinden etc.

Dies ist jetzt genauer zu untersuchen.

Im ersten Falle haben bekanntlich die h Gleichungen noch eine $\infty^{v-h-1=m}$ (lineare) Schaar von Lösungssystemen und umgekehrt die v Gleichungen eine $\infty^{h-v-1=-m'}$ Schaar solcher d. h. es müssen alle Kerne der Matrix verschwinden (was m' Bedingungen aequivalent ist), damit eine ($= \infty^0$) Lösung existirt. Es gilt also die Relation:

$$(13^a) \quad m - m' = -2 \text{ oder } m' = m + 2.$$

Verschwinden alle Kerne der Matrix (aber nicht alle Unterkerne erster Ordnung), so reduciren *) sich die h Gleichungen auf $h-1$, und somit steigt m auf $m+1$.

Umgekehrt, wie eben gezeigt, wird jetzt $m' = 0$, also in Zeichen:

$$(13^b) \quad m_0 = m + 1: \; m'_0 = 0.$$

Verschwinden weiter alle ersten Unterkerne (aber nicht alle zweiten), so reduciren sich die $h-1$ Gleichungen wieder um eine: andrerseits steigt $m+1$ um Eins, also

$$(13^c) \quad m_1 = m + 2, \; m'_1 = 1.$$

Denn die v Gleichungen haben jetzt eine ∞^1 (lineare) Schaar von Lösungen, da auch sie sich um eine d. h. auf $v-1$ reduciren. Geht man so weiter, so folgt:

Erster Hülfssatz. „Verschwinden alle ν^{ten} Unterkerne einer Matrix mit h Zeilen und v ($> h$) Colonnen {aber nicht alle $(\nu+1)^{\text{ten}}$}, so haben die h linearen Gleichungen mit v homogenen Unbekannten (und den Elementen der Matrix als Coëf-

*) Oder was dasselbe ist, es herrscht zwischen den h Gleichungen eine lineare Identität.

ficienten) eine lineare Schaar von Lösungssystemen, deren Mannigfaltigkeit ist:

$$(14)\quad m_\nu = m + \nu + 1 = v - h + \nu,$$

andrerseits die reciproken v Gleichungen mit h homogenen Unbekannten (und derselben Coefficientenmatrix) eine solche lineare Schaar von Lösungssystemen, deren Mannigfaltigkeit ist:

$$(15)\quad m'_\nu = \nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nur für den Fall, wo nicht alle Kerne der Matrix verschwinden, wird m'_ν negativ $= - m$ und zugleich von m abhängig: dann ist (15) zu ersetzen durch:

$$(13^a)\quad m' = m + 2 = v - h + 1.$$

Zweites Hauptmoment. Dieses beruht auf dem oft gebrauchten Satze:

Zweiter Hülfssatz. „Soll eine binäre Form n^{ter} Ordnung f als Summe von $(n-k)$ n^{ten} Potenzen $(\lambda-\delta_r)^n$ darstellbar sein, so sind die δ die Lösungssysteme der $= 0$ gesetzten, nach $(n-k)$ Elementen polarisirten k^{ten} Differentialquotienten von f und umg.“

Jetzt kann der Beweis unserer Sätze γ) kurz so geführt werden:

Die Formel (4), die die Mannigfaltigkeit der k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen mit festem Faktor μ^{ter} Ordnung darstellt, wird wie oben abgeleitet. Dann fährt man so fort:

Nach Voraussetzung existirt ein Lineargebilde $(d-k)^{ter}$ Dimension, welches die Curve R_n^d in μ Punkten $(\delta_1 \ldots \delta_\mu)$ trifft; mithin geht durch diese noch eine ∞^{k-1} (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$, deren jedes $(n-\mu)$ variable Restpunkte $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-\mu}$ aus der Curve ausschneidet.

Man entwickle die $(n-d)$ Schnittpunktgleichungen (8)

nach den aus den $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}$ gebildeten s_i ($i = 0, 1, \ldots n-\mu$): dann sind, wie wir wissen, die Coefficienten der s_i in jeder Gleichung die nach den μ Argumenten δ polarisirten $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der bez. Schnittpunktform (7) a_λ resp. b_λ, etc.

Diese $n-d$ in $n-\mu+1$ homogenen Unbekannten (s_i) linearen Gleichungen sollen nach Voraussetzung eine ∞^{k-1} Schaar von sie erfüllenden Werthsystemen besitzen, mithin ist nach (14):

$$(16)\ m_\nu = k-1 = (n-\mu+1) - (n-d) + \nu \quad \text{demnach:}$$

$$(17)\ \nu = \mu - d + k - 2 = m_\nu' \quad \text{(nach 15).}$$

Die Formel (17) liefert nach dem ersten Hülfssatz *) die Lösungsschaar der $n-\mu+1$ reciproken Gleichungen (mit $n-d$ homogenen Unbekannten). Diese sind aber nichts anderes, als die $= 0$ gesetzten $(n-\mu)^{\text{ten}}$, nach den μ Argumenten δ polarisirten Differentialquotienten einer Form der Schnittpunktformengruppe:

$$(18)\ k_a\, a_\lambda + k_b\, b_\lambda + \ldots k_{(n-d)}\, (n-d)_\lambda$$

wo die k ein Lösungssystem der ∞^{ν} (17) Schaar darstellen.

Demnach existirt nach dem zweiten Hülfssatz eine $\infty^{\nu} = \infty^{\mu-d+k-2}$ lineare Schaar d. h. eine $p = \nu + 1 = \mu - d + k - 1$-gliedrige Untergruppe der Gruppe der Schnittpunktformen (7), deren sämmtliche Individuen als Summen der μ n^{ten} Potenzen $(\lambda - \delta_\mu)^n$ darstellbar sind."

Dieser Beweis ist, wie evident, sofort Glied für Glied umkehrbar. Polarisirt man wieder rückwärts die ∞^{ν} Schaar der

*) In dem Ausnahmefalle, wo die Formel (15) durch (13a) ersetzt werden müsste, wird $\nu = -1$ also $p = 0$, was inhaltslos ist.

Potenzsummen (18) nach den μ Argumenten δ, so resultirt die Formel des Satzes γ_8).

208. Wir richten nunmehr unser Augenmerk auf den besondern Fall, wo die Mannigfaltigkeit unserer k-gliedrigen Untergruppe (1) (und damit auch der entsprechenden p-gliedrigen) $= 0$ ist d. h. wir suchen *alle endlichen* Untergruppen (einer gegebenen n^{ter} Ordnung), deren Individuen sich sämmtlich aus denselben μ n^{ten} Potenzen $(\lambda - \delta_\mu)^n$ linear zusammensetzen.

Setzt man den Werth von $d + 1 - k$ aus Formel (5) in (4) ein, so ergiebt sich

$$(19) \quad m = \mu - kp$$

d. i. die Beziehung zwischen k und p. Unsere Bedingung, $m = 0$, liefert somit zunächst:

$$(20) \quad \mu = kp$$

und setzt man dies in (5) ein:

$$(21) \quad d = (p + 1)(k - 1).$$

Wir behandeln vorerst einzelne Fälle, indem wir p und k spezielle Werthe ertheilen.

Für $p = 1$, $k = 2$, hat man $\mu = 2$, $d = 2$.

Dies ist der Fall der Doppelpunkte der R^2_n, deren Zahl bekanntlich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist, während die Zahl der Schnittpunktgleichungen sich auf $n-2$ beläuft. Daher hat man:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 2$ giebt es $\sigma = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ Formen f der Gestalt:

$$(22) \; f = a_1 (\lambda - \delta_{\sigma 1})^n + a_2 (\lambda - \delta_{\sigma 2})^n.\text{“}$$

Zweitens sei $p = 2$, $k = 2$; dann wird $\mu = 4$, $d = 3$. Dies tritt für die vierfachen Sekanten einer R^3_n ein. Wendet man die bekannte[66] Formel für die vierfachen Sekanten irgend

einer algebraischen Raumcurve auf die rationalen an, so berechnet sich ihre Anzahl als

$$(23)\quad s = \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.\,2} \cdot \frac{(n-3)\,(n-4)}{2.\,3}.$$

Dies liefert

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 3$ giebt es

$$(23)\quad s = \frac{(\nu+1)\,\nu}{1\,.\,2} \cdot \frac{\nu\,(\nu-1)}{2\,.\,3}$$

Involutionen $f + k\varphi$, wo

$$(24)\quad \begin{cases} f \equiv \Sigma\, a_i\, (\lambda - \delta_{si})^n \\ \varphi \equiv \Sigma\, b_i\, (\lambda - \delta_{si})^n \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).“$$

Die Zahlen σ, s habe ich durch Induktion auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, wo eine R^d_n eine endliche Zahl von Lineargebilden $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension besitzt, die sie in μ Punkten treffen und dann an einer Reihe einzelner Fälle, wo die direkte Berechnung möglich war, verificirt. Es wurden der Reihe nach bei variirendem k die Fälle $p = 1, 2,$ etc. durchgeführt. Dann ergab sich als allgemeines Resultat:

δ) I. „Nimmt man die ganzen positiven Zahlen ν, p, k *ganz beliebig* an (nur so dass $\nu > p-1$), woraus sich die Zahlen $d, n = \nu + d, \mu$ gemäss (20), (21) in bestimmter Weise ergeben, so besitzt eine R^d_n eine endliche Anzahl von Lineargebilden $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension, die mit der Curve μ Punkte gemein haben, von folgendem Werthe:

$$(25)\quad \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\dots\nu}{1\,.\;2\,.\dots\dots k} \cdot \frac{(\nu+k-2)(\nu+k-3)\dots(\nu-1)}{2\,.\quad 3\,.\dots\dots (k+1)} \cdot \dots\dots \frac{(\nu+k-p)\dots(\nu-p+1)}{p\,.\dots\dots (k+p-1)} = s^{(\nu)}_{p,k}.“$$

II. „In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + d$ giebt es eine *end-*

liche Anzahl $s^{(\nu)}_{p,k}$ von p-gliedrigen Untergruppen, deren Individuen sich sämmtlich aus den μ n^{ten} Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$ linear zusammensetzen, wo für jede dieser Untergruppen die δ_μ je *dieselben* sind."

Damit ist das angegebene Problem in allgemeinster Weise gelöst (indem alle nur möglichen endlichen Untergruppen der verlangten Art sich im Satze δ II vorfinden).

Der angegebene Werth für $s^{(\nu)}_{pk}$ steht natürlich unter der Verantwortlichkeit des Autors.

209. Von der weiteren unabsehbaren Reihe von Fällen ($m \lesseqgtr 0$) mögen etwa noch zwei herausgehoben werden, wo namentlich der zweite auf eine wichtige Eigenschaft einer speciellen Klasse von Gruppen binärer Formen führt.

Der erste handelt von den δ-fachen Punkten einer R^d_n. Bekanntlich existiren solche (abgerechnet den selbstverständlichen Fall $\delta = 1$) nur für $d = 2$, $\delta = 2$; diese sind schon oben in Betracht gezogen. Im Allgemeinen dagegen ist (nach (4) (5))

(26) $-m = d\delta - \{d + \delta\}$, $p = \delta-1$ und demnach:

„Damit eine R^d_n einen δ-fachen Punkt besitze d. h. ihre Gruppe eine d-gliedrige Untergruppe mit einem festen Faktor δ^{ter} Ordnung, sind die m Bedingungen nothwendig und ausreichend, dass die zur Gruppe der R^d_n conjugirte eine $p=\delta-1$-gliedrige Untergruppe enthält, deren Formen sämmtlich sich aus denselben δ n^{ten} Potenzen linear zusammensetzen."

210. Zweitens untersuchen wir solche Gruppen, die das System der d^{ten} Polaren einer Form ρ^{ter} Ordnung bilden. Zunächst fragen wir, welche Gruppen dieser Art giebt es, die allgemeiner Natur sind d. h. keine besondern Bedingungen unterliegen?

Nehmen wir an, die Gruppe einer R_n^d sei als d^{tes} Polarsystem einer Form f_ρ darstellbar. Dann ist einmal

$$(27) \quad \rho = n + d.$$

Andrerseits ist die Constantenzahl der R_n^d (gleich der eines Lineargebildes $(n-d)^{\text{ter}}$ Stufe im Raume von n Dimensionen nach Hülfssatz pg. 357) $= (d+1)(n-d)$. Da diese beiden Constantenanzahlen (der R_n^d und der f_ρ) jedenfalls übereinstimmen müssen, so folgt

$$(28) \quad (d+1)(n-d) = n + d \quad \text{oder} \quad n-d = 2.$$

Mithin bilden die Schnittpunktformen der R_n^d in diesem Fall eine Involution. Es lässt sich aber jetzt umgekehrt nachweisen, dass die zu irgend einer Involution n^{ter} Ordnung conjugirte Gruppe aus den $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form der Ordnung $2(n-1)$ zusammengesetzt ist.

In der That, sollen irgend $d+1$ (linear unabhängige) Formen einer $d+1$-gliedrigen Gruppe $\{\varphi_i(\lambda)\}$ der Ordnung $d+2$ identisch sein mit den d^{ten} Differentialquotienten einer Form $f_{2(d+1)}$, so ergeben sich für die $(d+1)^2$ homogenen Unbekannten (Coefficienten der φ) durch Vergleichung

$$(29) \quad 2\{1+2+3+\ldots d-1\}+3d = d(d-1)+3d = (d+1)^2-1$$

lineare Gleichungen, die also im Allgemeinen eine bestimmte Lösung haben werden.

Dass diese in der That immer bestimmt ist, folgt aus unserem Hauptsatze γ).

Denn lehnen wir uns im Augenblick an das schon früher behandelte Beispiel $n=4$ an, dann wird für die biquadratische Involution $k=1, \mu=4, d=1$ und somit nach Formel (4) (5) $p=3, m=1$.

Demnach sind (auf noch ∞^1 Arten) alle zur Involution conjugirten Formen (einer R_4^2) aus vier vierten Potenzen linear zusammensetzbar:

$$(30)\ \varphi_i(\lambda) = a_i(\lambda - \delta_a)^4 + b_i(\lambda - \delta_b)^4 + c_i(\lambda - \delta_c)^4 + d_i(\lambda - \delta_d)^4$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2).$$

Dann aber giebt es, wie Nr. 132 gezeigt, eine bestimmte Form f_6

$$(31)\ f_6 = \Sigma\, k_r (\lambda - d_r)^6 \quad (r = a,\ b,\ c,\ d)$$

deren zweite Polaren die Gruppe (30) bilden und zwar sind die dreireihigen Determinanten der letzteren den k umgekehrt proportional.

Also giebt es jedenfalls eine solche Form f_6: andrerseits nach Obigem auch nicht mehr wie eine. Die ∞^1 Werthsysteme der δ, mittelst deren f_6 dann als Summe von vier sechsten Potenzen auftritt, sind dann genau die bekannten, die nach Früherem die zur Gruppe ihrer zweiten Polaren conjugirte Involution bilden.

Und genau analog für irgend ein n: p wird dann $= n-1$, $m = 1$.

Dies liefert also den Satz: (cf. Nr. 214)

ε) „Die *einzigen allgemeinen* Gruppen binärer Formen n^{ter} Ordnung, die das volle System der d^{ten} Polaren einer Form $(n+d)^{\text{ter}}$ Ordnung f bilden, sind die zu einer allgemeinen Involution (n^{ter} Ordnung) conjugirten. Dabei ist $d = n-2$ und es giebt für jede Involution nur eine solche Form f *)."

*) Dann ist, wie wir wissen, die Funktionaldeterminante der Involution zugleich die der conjugirten Gruppe, was das Corollar des Satzes ε) liefert:

ε_1) Die Frage nach der Anzahl und Natur der Involutionen $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit denselben ($2m$) Doppelelementen ist identisch mit der Frage nach der Anzahl und Natur der Grundformen $2m^{\text{ter}}$ Ordnung, die zu einer bestimmten Covariante, der Determinante der $2(m-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten

211. Fassen wir jetzt noch einige andere vollständige Polarensysteme einer Form in's Auge, deren Gruppen demnach nur specielle sein können.

Gehen wir von den Gruppen des Satzes ε) zu den nächst höheren über, den zu den dreigliedrigen Gruppen conjugirten.

Nehmen wir an, die $(n-2)$-gliedrige Gruppe einer R_n^2 sei in der That die der $(n-3)^{ten}$ Polaren einer Form f (der Ordnung $2n-3$), so lässt sich, wie man weiss, die Form f (auf eine einzige Weise) als Summe von $n-1$ $(2n-3)^{ten}$ Potenzen $\{(\lambda-\delta_\mu)^{2n-3}\}$ darstellen, mithin auch ihre $(n-3)^{ten}$ Polaren als Summe der $(n-1)$ n^{ten} Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$. (Und zwar sind die δ die Wurzeln der einen zu den $(n-2)^{ten}$ Polaren von f conjugirten Form.)

Dann aber besitzt die R_n^2 nach Satz γ) einen $(n-1)$fachen Punkt (mit den Argumenten δ), d. h. die Gruppe der R_n^2 enthält eine Involution mit festem Faktor ($(n-1)^{ter}$ Ordnung).

Aber auch die Umkehrung ist leicht zu zeigen. Besitzt die R_n^2 einen $(n-1)$fachen Punkt (δ_μ) (wozu $n-3$ Bedingungen erforderlich sind, so dass sie nur noch von $3(n-2)-(n-3)$ $= 2n-3$ Constanten abhängt), so sind nach Satz γ), da in diesem Falle $p = n-2$ wird, alle Formen der Schnittpunktgruppe als Summen der $(n-1)$ Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$ darstellbar.

Dann erkennt man ohne Weiteres, wie in Nr. 200, durch Vergleichung der Coefficientenkerne K_μ dieser Gruppe und denen der Gruppe der $(n-3)^{ten}$ Polaren einer Form

$$(32)\quad f \equiv \sum_1^{n-1} k_\mu (\lambda-\delta_\mu)^{2n-3}$$

(wenn man von der letzteren als gegebener Form ausgeht) gehören.

Wir kommen auf diese Frage gleich nachher (Nr. 218) wieder zurück.

$$\text{dass (33)} \quad \sigma k_\mu = \frac{D_\mu}{K_\mu}$$

wo D_μ das Differenzenprodukt der δ (excl. δ_μ) ist. Dadurch ist also die Form f eindeutig bestimmt:

„Enthält eine dreigliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung eine Involution mit festem Faktor $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (d. h. besitzt die bez. R_n^2 einen $(n-1)$fachen Punkt), so lassen sich (und *nur* dann) die Formen der conjugirten Gruppe linear componiren aus den $(n-3)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Form f der Ordnung $2n-3$: d. h. diese Gruppe ist dargestellt durch:

$$(32) \quad a_{\lambda^n \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-3}} \cdot u$$

Und ebenso leitet man für die nächst höhere Gruppenstufe das Resultat ab:

„Enthält eine viergliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung ∞^1 Involutionen (mit festem Faktor $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung) (d. h. besitzt die bez. R_n^3 ∞^1 $(n-1)$fache Sekanten), so lassen sich (und *nur* dann) die Formen der conjugirten Gruppe linear componiren aus den $(n-4)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Form f der Ordnung $2n-4$, und ihr Ausdruck ist also

$$(34) \quad a_{\lambda^n \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-4}} \cdot u$$

Sind für eine R_n^3 die dazu erforderlichen 2 $(n-4)$ Bedingungen erfüllt *), so kann man analog wie oben, die Coefficienten der gesuchten Form f in eindeutiger Weise berechnen

*) Es giebt z. B., wie man weiss 67), zwei Arten von R_5^3, eine allgemeine mit einer einzigen Quadrisekante (der Schnitt von zwei cubischen Regelflächen mit gemeinsamer Doppelgeraden) und eine besondere mit ∞^1 solcher, die dann stets auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt.

Und so lassen sich auch im Allgemeinen die Eigenschaften einer Gruppe, deren conjugirte das volle r^{te} Polarensystem einer Form f bildet, zufolge der verschiedenen Darstellungen von f als Potenzsumme und mit Hülfe unseres Hauptsatzes γ) ohne Weiteres angeben. Welche Eigenschaften aber umgekehrt für eine Gruppe nothwendig und hinreichend sind, damit ihre conjugirte ein solches Polarensystem bildet, und wie man die zugehörige Form f dann am einfachsten aufstellt — diese Frage bleibe noch unerledigt.

Die weiteren Anwendungen unseres Hauptsatzes γ) (der somit eine besonders wichtige Illustration des allgemeinen Combinantenprincips der Nr. 26 darbietet) auf das ternäre, quaternäre etc. Gebiet treten erst nach der jetzt folgenden Darlegung einiger fundamentalen Eigenschaften der eine Normcurve stützenden Flächen in das erforderliche Licht.

§. 35.

Ein neues Übertragungsprincip*) der invarianten Eigenschaften binärer Formen vom Grade mp auf Gebiete m^{ter} resp. p^{ter} Ausdehnung.

212. Hülfsdefinition. Im Raume von d Dimensionen treffe eine Fläche F_r (r^{ter} Ordnung) die Normcurve (d^{ter} Ordnung) N_d $\{\rho x_i = d_i\lambda^i,\ i = 0, 1, .. d,$ wo die d_i die zur Zahl d gehörigen Binomialcoefficienten sind$\}$ in dem Punkt-(rd)-tupel:

Die Schnittpunktformen der R_5^3 (d. h. die Formen einer Involution fünfter Ordnung) sind also im Allgemeinen stets als Summen von vier bestimmten, festen Potenzen darstellbar cf. pg. 193: dagegen in dem besondern Falle noch auf ∞^1 Weisen (cf. auch Wiederhold in Clebsch Ann. 8).

Man erkennt übrigens leicht, dass alle zur Darstellung (33) gehörigen R_n^3 auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen müssen (aber nicht umg.).

*) Besondere Fälle desselben sind schon pg. 94, 200, 225 betrachtet. Das Gleiche gilt von dem Hülfssatz η): pg. 90, 198, 224.

$a_\lambda^{rd} = 0$ und desgleichen habe eine Fläche Φ_ρ (ρ^{ter} Klasse) mit derselben Normcurve N_d $\{\sigma u_i = (-1)^i \lambda^{d-i}\}$ das (ρd)-tupel von Lineargebilden $\beta_\lambda^{\rho d} = 0$ gemein. Dann heisse es kürzer: „Die F_r hat mit der (Normcurve) N_d das (rd)-tupel a_λ^{rd} und die Φ_ρ mit der (Normcurve) N_d das (ρd)-tupel $\beta_\lambda^{\rho d}$ gemein".

Dann lautet das gemeinte Princip so:

ζ) „Ist n keine Primzahl, also $= mp$, so ist die bilineare Invariante (n^{te} Überschiebung) zweier binärer Formen der Ordnung n (a_λ^n, b_λ^n) zugleich die bilineare Invariante zweier ($p + 1$)-närer Formen der Ordnung, resp. Klasse m, die $= 0$ gesetzt, im Raume von p Dimensionen zwei Flächen F_m, Φ_m (m^{ter} Ordnung, resp. Klasse) darstellen, die mit einer (sonst beliebigen) Normcurve (p^{ter} Ordnung und Klasse, die auf F ruht und Φ stützt) resp. die n-tupel a_λ^n, b_λ^n gemein haben.

Sind also die binären Formen apolar, so auch die ($p + 1$)-nären und umg."

Dabei sind natürlich die Zahlen m, p vertauschbar, sodass man ebenso mit zwei ($m + 1$)-nären Formen operiren kann. Desgleichen die beiden binären Formen.

Dem Beweise gehe der Hülfssatz voran:

η) „Ist auf einer Normcurve d^{ter} Ordnung ein (rd)-tupel $a_\lambda^{rd} = 0$ gegeben, so giebt es nur eine *einzige* F_r (resp. Φ_r), die mit ihr dasselbe gemein hat und die Curve stützt (auf ihr ruht)."

Diesen Satz beweisen wir zunächst für den Fall $r = 2$.

Dann stützt eine F_2 die Curve N_d, wenn sie alle, N_d um-

beschriebenen Φ_2 stützt. Die letzteren sind aber dargestellt durch die verschwindende Matrix:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_d \end{vmatrix} = 0.$$

Demnach müssen für die F_2:

$$(2)\quad a_x^2 = 0$$

die Bedingungen

$$(3)\quad a_{ik} = a_{lm}$$

erfüllt sein, so oft

$$(4)\quad i + k = l + m.$$

„Demnach sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine F_2 die N_d stützt, dadurch ausgedrückt, dass man die Coefficienten von F_2 a_{ik} $(i, k = 0, 1, \dots d)$ ersetzt durch die $2d + 1$ (homogenen) Grössen a_{i+k} $(i + k = 0, 1 \dots 2\, d)$."

Soll des Weiteren die F_2 mit N_d die Punktgruppe

$$(5)\quad f \equiv a_\lambda^{2d} = 0$$

gemein haben, so werden die Coefficienten a_{i+k} der Fläche den entsprechenden Coefficienten von f (zunächst abgesehen von Zahlenfaktoren) proportional. q. e. d.

Die Gleichung unserer Normcurve N_d ist aber gerade so gewählt, dass die Gleichung der F_2 wird:

$$(6)\quad a_x^2 \equiv a_\sigma^2 = 0$$

wo diese Form aus der andern

$$(7)\quad a_s = 0$$

(die ihrerseits wieder durch Polarisation von f nach $2d$ Elementen $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_{2d}$ entsteht), durch Gleichsetzen je zweier Elemente $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ etc. hervorgeht.

Die σ sind dann die homogenen symmetrischen Funktionen

der so restirenden d Elemente λ und mit den Coordinaten x' eines Punktes identisch.

In der That sind ja evidenter Weise für die Form (6) a_σ^2 die Bedingungen $a_{ik} = a_{i+k}$ erfüllt und durch Gleichsetzen aller d Elemente λ geht sie (vermöge ihrer Entstehung) wieder in die Form (5) über d. h. die F_2 (6), die die N_d stützt, hat mit ihr die Punktgruppe (5) gemein.

Wir gehen jetzt über zum nächsten Fall, $r = 3$. Soll eine F_3

$$(8) \quad a_x^3\ ^{*)} = 0$$

die N_d stützen, d. h. soll die letztere auf allen ersten Polarflächen der F_3 ruhen, so muss

$$(9) \quad a_{sik} = a_{slm} \quad (s = 0, 1, 2, 3)$$

sein, so oft

$$(10) \quad i + k = l + m$$

ist. Dann aber werden *alle* a_{sik}, für die $s + i + k$ denselben Werth ($= N$) hat, einander gleich.

Zu dem Zwecke hat man nur nachzuweisen, dass man alle möglichen Zerlegungen der Zahl N in drei Theilzahlen (deren jede von den Grenzen 0 und d eingeschlossen ist) erhält, wenn man von irgend einer Zerlegung (s, i, k) ausgeht: sodann andere dadurch ableitet, dass man die eine Zahl, etwa s constant lässt, während die beiden andern sich bewegen, doch so, dass ihre Summe sich nicht ändert; mi diesen neuen Zerlegungen gleichfalls so verfährt etc.

Wir wollen weiterhin drei Klassen von Zahlen N unte scheiden; die erste umfasse die Zahlen 0 bis d, die zwe $d + 1$ bis $2\,d$, die dritte $2\,d + 1$ bis $3\,d$. (Grösser kann nicht werden.)

---

*) Wir denken uns, wie üblich, eine solche Form a_x^n immer mi bez. Polynomialcoefficienten geschrieben.

Dann ist in den drei Klassen jedenfalls immer eine Zerlegung folgender Art vorhanden:

(10) I. $0, N, 0$. II. $0, d, N-d$. III. $d, N-2\,d, d$.

Lassen wir hier immer die dritte Zahl fest, während die beiden andern alle Werthe annehmen, deren Summe resp. $N, d, N-d$ ist, so erhalten wir aus (10) ebensoviel weitere resp. Zerlegungen, die mit (10) ein derartiges System bilden, dass jede überhaupt mögliche Theilzahl in mindestens einer dieser Zerlegungen vorkommt. Lässt man sie dann jedesmal constant, während die beiden andern Theilzahlen gemäss (4) variiren, so kommt man offenbar zu allen Zerlegungen. q. e. d.

Den ganz allgemeinen Beweis endlich für $n = n$ führt man mittelst des Princips „n auf $n+1$“. Angenommen, der Satz gelte für eine F_n, dann gilt er auch für eine F_{n+1}. Denn es müssen dann je zwei Coefficienten der letzteren:

(11) $a_{s\,i_1\,i_2\,\ldots\,i_n} = a_{s\,k_1\,k_2\,\ldots\,k_n}$ $(s = 0, 1, \ldots n+1)$

gleich sein sobald

(12) $(\Sigma i = \Sigma k)$.

η_1) Dann aber werden *alle* $a_{s_0\,s_1\,\ldots\,s_n}$, für die $s_0 + s_1 + \ldots s_n$ denselben Werth (N) hat, einander gleich. In der That ist wieder nur zu zeigen, dass man immer ein solches System von Zerlegungen der Zahl N in $n+1$ Theilzahlen (innerhalb der Grenzen 0 und d) aufstellen kann, so dass jede nur mögliche Theilzahl jedenfalls einmal vorkommt. Denn lässt man diese wieder jedesmal fest, während die andern so variiren, dass ihre Summe sich nicht ändert, so kommt man jedenfalls zu allen überhaupt möglichen Zerlegungen.

Wir unterscheiden jetzt $n+1$ Klassen in der Weise wie oben: $(0 \ldots d)$ $(d+1, \ldots 2\,d)$ etc. bis $\{nd+1, \ldots (n+1)\,d\}$. Von diesen brauchen aber nur $\frac{n+1}{2}$ resp. $\frac{n}{2}+1$ (je nachdem

n gerade oder ungerade ist) berücksichtigt zu werden, da für die restirenden Klassen nur überall 0 mit d zu vertauschen ist, um das gleiche Ergebniss zu erhalten.

In der ersten Klasse existirt sicher die Zerlegung $0\,N\,000\ldots$: in der p^{ten} Klasse desgleichen die folgende: „0, d nebst noch $(p-2)$ andern d, dann der Zahl $N-(p-1)\,d$ und endlich noch $n-p$ Nullen "(so dass selbst in der letzten der betrachteten Klassen noch $\frac{n-1}{2}$ resp. $\frac{n}{2}-1$ Nullen auftreten). Lässt man hier überall die beiden ersten Ziffern bei constanter Summe variiren, während alle übrigen etwa constant bleiben, so gelangt man immer zu dem gewünschten System. Damit ist die aufgestellte Behauptung bei der gemachten Annahme erwiesen: und da sie für $n+1=2, 3$ oben erhärtet ist, so gilt sie allgemein.

η_2) Somit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen*), dass eine F_{n+1} eine N_d

*) Die Zahl dieser Bedingungen ist leicht anzugeben. (Wir schreiben wieder n statt $n+1$.) Denn da bekanntlich eine F_n von $D_n = \binom{n+d}{d}-1$ Constanten abhängt, andrerseits eine Form a_λ^{nd} von nd, so ist die gewünschte Zahl $x = D_n - nd$. Es lässt sich nun zeigen, dass:

η_3) „die Bedingungen η_1) des Satzes η_2) auch aussagen, dass eine F_n die *ganze* (∞^{x-1}) Schaar von N_d umschriebenen Φ_n stützt und umg."

Zunächst lehrt eine einfache Abzählung, dass eine Φ_n, sofern sie einer N_d umbeschrieben sein soll, $nd+1$ Bedingungen genügen muss, da die Gleichung für das beiden gemeinsame (nd)-tupel $\beta_\lambda^{nd}=0$ identisch verschwinden muss. (Deren Coefficienten sind im allgemeinen unabhängig von einander, da man ja umgekehrt von einem ganz beliebigen (nd)-tupel auf N_d ausgehen kann, somit auch jene $nd+1$ Bedingungen.) Demnach ist die Mannigfaltigkeit dieser Schaar („Φ") gleich $D_n-(nd+1)$ $= x-1$. Um jetzt den Satz η_3) zu erhärten, wählen wir als Typus

stützt, dadurch ausgedrückt, dass man ihre Coefficienten in der Form schreibt:

---

die Schaar der einer N_3 umschriebenen Φ_3. In diesem Falle sagen die Bedingungen η_1) aus, dass eine F_3 die folgenden zwölf, N_3 umschriebenen Φ_3 (und somit auch die aus ihnen linear componirte Schaar) stützt:

$u_i\,(u_0\,u_2 - u_1^2) = 0,\ u_i\,(u_0\,u_3 - u_1\,u_2) = 0,\ u_i\,(u_1\,u_3 - u_2^2) = 0\ (i = 0, \dots 3).$

Offenbar ist aber die Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen, dass F_3 diese Schaar stützt genau dieselbe wie die Zahl der linear unabhängigen Φ_3, aus denen die Schaar linear zusammensetzbar ist und umgekehrt, also in unserem Falle $= 19 - 9 = 10$.

In der That gelten zwischen jenen Bedingungen, deren man zunächst zwölf erhält, die zwei Identitäten (und nur diese):

$$(a_{013} - a_{022}) + (a_{112} - a_{103}) + (a_{202} - a_{211}) \equiv 0$$
$$(a_{113} - a_{122}) + (a_{212} - a_{203}) + (a_{302} - a_{311}) \equiv 0$$

und dem entsprechend zwischen den zwölf Φ_3 die andern beiden:

$$u_0\,(u_1\,u_3 - u_2^2) + u_1\,(u_1\,u_2 - u_0\,u_3) + u_2\,(u_0\,u_2 - u_1^2) \equiv 0$$
$$u_1\,(u_1\,u_3 - u_2^2) + u_2\,(u_1\,u_2 - u_0\,u_3) + u_3\,(u_0\,u_2 - u_1^2) \equiv 0.$$

Somit bildet unsere auf F_3 ruhende, N_d umschriebene Schaar „Φ“ gerade eine ∞^9 lineare Schaar, ist also identisch mit der ganzen N_d umschriebenen Schaar von Φ_3.

Und ganz so im Allgemeinen. Die linearen Identitäten zwischen den Bedingungen η_1) lassen sich immer sofort hinschreiben, und demnach auch die correspondirenden zwischen den Φ_n, und die Anzahlen beider Bedingungen müssen sich auf x reduciren.

Man hat daher als unmittelbare Folge von Satz η_2):

η_4) „Die vollständige ∞^{x-1} Schaar der einer N_d umschriebenen Φ_n wird jedenfalls dargestellt, wenn man die $d\,\frac{(d-1)}{2}$, N_d umschriebenen Φ_2 mit (den linken Seiten von) ebensoviel ganz beliebigen Flächen Φ_{n-2} multiplicirt und addirt.“

η_5) „Eine F_n stützt eine N_d dann (und nur dann), wenn sie die ganze, der N_d umschriebene Schaar von Φ_n stützt.“

Die dualistischen Sätze verstehen sich dadurch von selbst.

$$(13)\quad a_{s_0\, s_1 \ldots s_n} = a_{s_0\,,\, s_1 + \ldots s_n}.$$

Denn wo die Zerlegung einer Zahl N in $(n+1)$ Theilzahlen $(0 \ldots d)$ nur auf eine Art möglich ist, ist die Schreibweise (13) selbstverständlich gestattet.

Schneidet man jetzt die F_{n+1} mit der Curve N_d, so gelangt man zu einer Gleichung der Ordnung $d\,(n+1)$:

$$(14)\quad f \equiv a_\lambda^{d(n+1)} = 0$$

deren Coefficienten einzeln den Coefficienten $a_{s_0 + s_1 + \ldots s_n}$ der F_{n+1} proportional sind (abgesehen etwa von Zahlenfaktoren). Geht man somit umgekehrt von einer beliebigen Gleichung (14) d. h. von einem beliebigen $d(n+1)$-tupel der N_d aus, so kann es nur eine F_{n+1} geben, die die N_d stützt und mit ihr diese Schnittpunktgruppe gemein hat.

q. e. d.

Dann aber ist wieder die gesuchte F_{n+1} keine andere als

$$(15)\quad a_\sigma^{n+1} \equiv a_x^{n+1} = 0$$

wo diese Form aus a_s (die ihrerseits aus (14) durch Polarisation nach $d\,(n+1)$ Elementen entsteht) hervorgeht, wenn man immer $n+1$ dieser Elemente gleichsetzt.

Denn diese Form (15) erfüllt nach Nr. 21 die Bedingungen (13).

Demnach ist sowohl (15) durch (14), als umgekehrt, eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann dualistisch für eine Φ_{n+1}, die auf der N_d ruht. Dann aber muss (cf. den Schluss des Werkes) die bilineare Invariante zweier solcher Flächen F_{n+1}, Φ_{n+1} zugleich eine solche der beiden binären Formen (14) sein und umgekehrt und da es beiderseitig nur eine solche giebt, so ist unser Prinzip *) ζ) vollständig abgeleitet.

Man sieht, dass die frühere Definition des Stützens auch durch die letztere Erklärung ersetzt werden kann.

*) Da bekanntlich nach Cayley[68] jede In- und Covariante binär—

Die Anwendung dieses Prinzips auf conjugirte Gruppen binärer Formen fliesst daraus von selbst, man vgl. pg. 95, 205. Sie bleibe noch verschoben, bis wir die beiden weiteren Hülfssätze (den F- und H-Satz) erledigt haben, die nunmehr folgen. So wird man dann im Verein mit dem allgemeinen Satze des §. 34 zu sehr allgemeinen Apolaritätssätzen für die Normcurven geführt.

§. 36.

Der allgemeine Stütz- (F) und Vielflach- (H) Satz der Normcurven.

213. Der erstere dieser Sätze fliesst ohne Weiteres aus dem Prinzip ζ), der Form (15) einer die Normcurve N_d stützenden F_n und endlich aus der uns geläufigen Darstellung einer binären Form ν^{ter} Ordnung als Summe von $\nu, \nu - 1 \dots$ etc. Potenzen, — ganz wie die besondern Fälle pg. 94, 102, 202, 206, 213, 215, 226, 229, 234, 328.

Hülfsbezeichnung. Wir sagen:

„n Punkte $\{(x_i^{(k)})\ (i = 1, 2, \dots n,\ k = 0, 1, \dots d)\}$, deren Coordinaten der Gleichung genügen

$$(1)\quad a_{x_1\, x_2\, \dots\, x_n} = 0$$

bilden ein Pol-n-tupel[69] der Fläche $a_x^n = 0$." Ferner:

„nd Lineargebilde „u_i" ($u_{ix} = 0,\ i = 1, 2, \dots nd$) bilden ein Pol-$nd$-flach[69] der Fläche $a_x^n = 0$, wenn jede der Gruppen von n Punkten, durch deren jeden je d der Gebilde u gehen, ein Pol-n-tupel der Fläche bilden."

Formen als bilineare Invariante zweier solcher Formen gleicher Ordnung aufgefasst werden kann, so lässt sich daraus die Fruchtbarkeit unseres Principes ermessen. Die Formen von einer primen Ordnungszahl lassen sich vor der Hand erst soweit hereinziehen, dass man sich auf die Invarianten derjenigen ihrer Covarianten beschränkt, deren Ordnungszahl nicht prim ist. Diese In- und Covarianten (von Covarianten der Grundform(en)) sind ja bekanntlich wieder solche der Grundform(en).

Dann geht aus der Form $a_\sigma^n = 0$ einer eine N_d stützenden F_n sofort der Hülfssatz hervor: „Stützt eine F_n eine N_d (d. h. eine beliebige Curve d^{ter} Ordnung und Classe in einem Raume von d Dimensionen), so bilden die von den n Punkten eines Pol-n-tupels der Fläche an die N_d gehenden nd Lineargebilde (u) ein Pol-nd-flach der Fläche und umgekehrt."

Dies führt zum Hauptsatze:

Stütz-(F)Satz ι)

I. „Ist ν eine ganze, positive Nichtprimzahl, $= nd$ und

Erstens gerade $= 2l$. Seien ferner $m_{2l}, m_{2l-1} \ldots m_1$ ganze positive Zahlen (incl. 0), die nur der einen Bedingung zu genügen haben:

$$(2)\quad 1.\, m_{2l} + 2.\, m_{2l-1} + \ldots l_{ml+1} = nd = 2l,$$

so sind irgend welche

m_{2l}, m_{2l-1}, ... m_{l+1} einer N_d umschriebene resp. ($2l$)-, ($2l$—1)-,...(l+1)-flache

im allgemeinen immer die bez. Pol-flache einer bestimmten die N_d stützenden F_n."

„Ist nd zweitens ungerade $= 2l - 1$, und besteht zwischen ebensolchen Zahlen $m_{2l-1}, m_{2l-2} \ldots m_1$ die eine Relation

$$(2')\quad 1 \,.\, m_{2l-1} + 2 \,.\, m_{2l-2} + \ldots, lm_1 = nd = 2l - 1$$

so sind irgend welche

m_{2l-1}, m_{2l-2}, ... m_1 einer N_d umschriebene resp.

($2l$—1)-, ($2l$—2)-, ... l-flache

die bez. Pol-flache einer bestimmten die N_d stützenden F_n."

II. „Diese F_n erhält man beidemal so. (Man setze statt $2l$ resp. $2l - 1$ wieder nd).

Es giebt eine ∞^0, ∞^1, ... ∞^{1-1} lineare Schaar von Φ_n, die jedem der bez.

m_{nd}, m_{nd-1}, ... $m_{\frac{nd}{2}}$ (resp. $m_{\frac{nd+1}{2}}$) N_d umschriebenen

(nd)-, $(nd-1)$-, ... $\frac{nd}{2}$-(resp. $\frac{(nd+1)}{2}$-)flache

einbeschrieben sind und auf N_d *ruhen*.

Dann ist die gesuchte F_n diejenige, die diese sämmtlichen Schaaren von Φ_n (nebst N_d) stützt."

III. „Dann giebt es (für jede die N_d stützende F_n) eine

∞^{nd-1}, ∞^{nd-3}, ... ∞^1 (resp. ∞^0) von, N_d umschriebenen Pol-

(nd)-, $(nd-1)$-, ... $\frac{nd}{2}$-(resp. $\frac{nd+1}{2}$-) flachen der F_n.

Diese (d. h. ihre Lineargebilde (u)) sind dargestellt durch die zu den

0ten, 1ten, ... $\frac{nd}{2}^{ten}$ (resp. $\frac{nd+1}{2}^{ten}$) Polaren der Form

$f = a_\lambda^{nd}$ (die F_n mit der N_d gemein hat) *conjugirten Gruppen*.

Mittelst irgend eines dieser Pol-flache stellt sich F_n als resp. Summe von

(nd), $(nd-1)$, ... $\frac{nd}{2}$ (resp. $\frac{nd+1}{2}$) n^{ten} Potenzen dar."

Da ein solches Pol- $(nd-i)$-flach der F_n aus einem Pol-nd-flach derselben dadurch entsteht, dass i Lineargebilde (u) (d. h. ein Faktor i^{ter} Ordnung einer Form A_λ^{nd}) unbestimmt werden, so drückt sich die dem Satze II zur Seite gehende algebraische Construktion der F_n einfach so aus:

IV. „Sind die m_{nd}, m_{nd-1}, ... $m_{\frac{nd}{2}}$ $(m_{\frac{nd+1}{2}})$ gegebenen

(N_d umschriebenen) Vielflache dargestellt durch ebensoviele binäre Formen (von der Ordnung des bezüglichen Index), so multiplicire man immer die

$$m_{nd-k} \; (k = 0, 1, \ldots \frac{nd}{2} \text{ resp. } \frac{nd-1)}{2}$$

Formen succ. mit

$$\mu^k, \; \mu^{k-1}\lambda, \; \ldots \lambda^{k-1}\mu, \lambda^k.$$

Die zu diesen so entstehenden nd Formen (der Ordnung nd) conjugirte ist die Form $f = a_\lambda^{nd}$, aus der in der gewohnten Weise die Gleichung

$$(3) \quad a_\sigma^n = 0$$

unserer gesuchten F_n hervorgeht."

214. Besonders bemerkenswerth ist der specielle Fall, wo die Gleichung (2) die einfache Form annimmt:

$$(4) \quad nm_{nd-(n-1)} = nd.$$

Er löst nemlich eine (an Nr. 210 sich anschliessende) fundamentale Frage:

Wann besitzt eine Gruppe binärer Formen eine solche *Untergruppe*, die mit dem vollständigen Polarsystem (einer gewissen Ordnung) einer bestimmten binären Form identisch ist?

Zunächst sagt nemlich Satz ι) für die Gleichung (4) aus:

„Irgend d einer N_d umschriebene $(nd - n + 1)$-flache sind Pol-flache einer bestimmten F_n $a_\sigma^n = 0$."

Diese hat mit N_d die Punktgruppe $f = a_\lambda^{nd}$ gemein, die man erhält, wenn man die entsprechenden d gegebenen Formen (der Ordnung $nd-n+1$) succ. mit $\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}\mu, \ldots, \mu^{n-1}$ multiplicirt und die zu diesen nd Formen conjugirte bestimmt.

Andrerseits ist die ganze Gruppe der N_d umschriebenen Pol-$(nd-n+1)$-flache der F_n dargestellt (nach ι, III) durch die zur Gruppe der $(n-1)^{ten}$ Polaren der Form f conjugirte

Gruppe (mit der Gliederzahl $nd-2n+2$). Diese ist also jedenfalls zusammensetzbar aus den d gegebenen Formen nebst noch $nd-2n-d+2$ weiteren (linear unabhängigen).

Und da endlich die zu den d gegebenen Formen conjugirte Gruppe eine $(nd-n-d+2)$-gliedrige ist und diese die n-gliedrige Gruppe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren von f unbedingt enthalten muss (und nach Satz ι) nur diese eine), so gilt zunächst:

„Eine $t = nd-n-d+2$-gliedrige Gruppe von binären Formen der Ordnung $\mu=nd-n+1$ enthält (im Allgemeinen) eine (einzige) n-gliedrige Untergruppe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form f (der Ordnung nd)."

U· gekehrt ergiebt sich aber sofort, wenn man jetzt t und μ als beliebig gegeben annimmt:
(5) $(d-1)(d+t-2-\mu+1) = 0$ also, da der Fall $d = 1$ bedeutungslos ist: (6) $d=\mu-t+1$ und weiter

$$(7)\quad n = \frac{\mu-1}{d-1} = \frac{\mu-1}{\mu-t} = 1 + \frac{t-1}{\mu-t}.$$

So oft also $\mu-1$ (oder auch $t-1$) durch $\mu-t$ theilbar ist (und nur dann), giebt es ein Werthsystem d, n, das der Aufgabe genügt. Dies liefert also das Resultat:

ϰ) „Sind μ, t zwei, sonst beliebige, ganze positive Zahlen, die nur der einen Ungleichheit zu genügen haben, dass $\mu-1$ (und damit auch $t-1$) durch $\mu-t$ theilbar ist, so besitzt (aber auch nur dann) eine t-gliedrige binäre Gruppe der Ordnung μ im Allgemeinen stets eine einzige $n=\frac{\mu-1}{\mu-t}$-gliedrige Untergruppe, die sich aus allen $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form f der Ordnung

$$(8)\quad nd = \frac{\mu-1}{\mu-t}(\mu-t+1) = n+\mu-1$$

zusammensetzt."

Aus der Construktion von f, wie sie oben angegeben wurde,

folgt sofort, dass f eine Combinante der d gegebenen Formen, also auch ihrer conjugirten Gruppe; mithin in Satz $\varkappa$) eine Combinante der gegebenen t-gliedrigen Gruppe ist, wie ja auch direkt evident ist.

Der Satz $\varkappa$) fasst den Satz ε) (pg. 366) als speciellen Fall in sich; in der That, wenn wir t gleich n setzen, so folgt

$$(9)\quad t = \frac{\mu-1}{\mu-t} \text{ oder } \mu = t + 1$$

und umg.

Ein anderer wichtiger Specialfall wird durch die Annahme $n = 2$ erhalten. Dann wird

$$(10)\quad \mu = 2\,t-1 \text{ oder } \mu - t + 1 = t$$

und umg.: dann aber ist die zur gegebenen Gruppe conjugirte von der gleichen Gliederzahl wie diese. In diesem Falle geht also der Form f immer eine zweite solche gleicher Ordnung zur Seite, die die bez. Combinantenbildung der conjugirten Gruppe ist.

215. Um den Hauptsatz des §. 34 für unsern Stützsatz verwerthen zu können, wird es, wenigstens behufs der grössten Einfachheit im Ausdrucke des Resultates, nöthig sein, die dort aufgestellten Formeln nach einer Richtung hin zu ergänzen. Will man nemlich jenen Satz nur als Potenzsummensatz für eine gegebene Gruppe (ohne Rücksicht auf die bez. Eigenschaften ihrer conjugirten) formuliren, so wird man aus den beiden Gleichungen ((4) (5) pg. 355) k eliminiren. Dies liefert zunächst nach leichter Rechnung:

$$(11)\quad m = (\mu-p)\,(p+1) - dp$$

oder da bei gegebener t-gliedriger Gruppe n^{ter} Ordnung

$$(12)\quad n-d = t \text{ also } d = n-t \text{ ist,}$$

$$(11)\quad m = (\mu-p)\,(p+1) - p\,(n-t).$$

Dabei bedeutet m die Mannigfaltigkeit derjenigen p-gliedrigen Untergruppe (der gegebenen), deren Formen sich als Summen von (denselben) μ (n^{ten}) Potenzen schreiben lassen.

Im Besondern giebt es demnach eine endliche Zahl solcher Untergruppen, wenn $m = 0$. Dann aber kommt:

$$(13) \quad \mu = p \cdot \frac{p+1+n-t}{p+1} = p\,\{1 + \frac{n-t}{p+1}\}:$$

λ) „Dies ist somit dann und nur dann möglich, wenn $(n-t)$ durch $(p+1)$ theilbar ist. Dann aber giebt es auch immer solche Untergruppen."

Specialisirt man andrerseits den Hauptsatz in der Weise, dass man nach der Darstellbarkeit der gegebenen Gruppe selbst fragt, so wird $t = p$ und (11) zu:

$$(14) \quad m = t\,(\mu - n - 1) + \mu$$

und sucht man hier wieder die endlichen Anzahlen von Potenzsummendarstellungen, so kommt

$$(15) \quad \mu = t \cdot \frac{n+1}{t+1} \text{ d. h.}$$

μ) „Die Formen einer gegebenen t-gliedrigen binären Gruppe n^{ter} Ordnung sind immer (und nur dann) auf eine endliche Art als Summen (je derselben) μ (n^{ten}) Potenzen darstellbar (u. umg.), so oft $(n+1)$ durch $(t+1)$ theilbar ist."

In der That geht dieser Satz auch aus dem vorigen (λ) für $t = p$ hervor.

Desgleichen ist zu unserem Zwecke die Erweiterung unseres Stützsatzes mittelst des vorher gewonnenen Übertragungsprincipes auf conjugirte Gruppen von mehreren Formen unentbehrlich.

Was die Bezeichnung angeht, so werden die Begriffe „Gruppe, Untergruppe" auch bei ternären etc. Formen beibehalten.

Ist die Form einer F_n irgendwie als Summe von μ (n^{ten}) Potenzen dargestellt, so bilden bekanntlich[69] die bezüglichen μ Lineargebilde (u) ein Pol-μ-flach der Fläche und umg.: das Analoge gilt von einem gemeinsamen Pol-μ-flach mehrerer F_n.

Dann spricht sich der allgemeine Stützsatz für Gruppen von Formen ohne Weiteres so aus:

ν) „Gegeben sei eine N_d (N_d) und eine ∞^m $\{m = 0, 1, 2, \ldots (nd-1)\}$ lineare Schaar (Gruppe) von F_n, die alle die Curve N_d stützen.

Dann existirt eine ∞^μ ($\mu = nd-1-m$) lineare Schaar (Gruppe) von Φ_n, die alle auf dieser „F"-Gruppe und auf N_d ruhen.

Die dieser „Φ"-Gruppe mit N_d gemeinsamen nd-tupel (von Gebilden u) bilden dabei die *vollständige* zur Gruppe der der „F"-Gruppe und N_d gemeinsamen (Schnittpunkt-) nd-tupel conjugirte Gruppe.

Dem entspricht dann, dass die *vollständige* zur „F"-Gruppe conjugirte Φ_n-Gruppe sich linear aus den Flächen der „Φ"-Gruppe und den der Curve N_d umschriebenen Flächen zusammensetzt und umgekehrt die *vollständige* zur „Φ"-Gruppe conjugirte aus den Flächen der „F"-Gruppe und den der Curve N_d einbeschriebenen Flächen.

Geht man umgekehrt von zwei auf der Curve N_d (N_d) dargestellten conjugirten binären Gruppen (der Ordnung nd) aus, so gelangt man wieder eindeutig zu den beiden Gruppen der „F" und „Φ" zurück, die mit N_d (N_d) jene gegebenen binären Gruppen resp. gemein haben."

Dann spicht sich der Hauptsatz des §. 34 nunmehr so aus (wenn die Begriffe Pol-μ-flach und Pol-μ-Eck sich dualistisch gegenüberstehen):

π) I. „Gegeben sei eine $(d+1)$-gliedrige Gruppe von F_n, die alle eine N_d (d. h. eine Raumcurve d^{ter}

Ordnung (Klasse) in einem Raume von d Dimensionen) stützen.

In dieser Gruppe befinde sich eine k-gliedrige Untergruppe von F_n, die alle aus der N_d (abgesehen von je *) μ festen Punkten noch) eine k-gliedrige Gruppe der Ordnung $(nd-\mu)$ ausschneiden. Dann ist die Mannigfaltigkeit dieser Untergruppe

$$(16)\quad m = k(d+1-k) - \mu(k-1) = \mu - kp \quad \text{wo}$$

$$(17)\quad p = \mu - (d+1-k).$$

Dann besitzt die zur N_d **) und zur F_n-Gruppe *vollständige* conjugirte Φ-Gruppe eine p-gliedrige Untergruppe von gleicher Mannigfaltigkeit, deren Flächen sämmtlich das μ-Eck der bez. μ festen Punkte der Curve zum Pol-μ-Eck besitzen."

π) II. Gegeben sei eine t-gliedrige Gruppe von F_n, die alle eine N_d stützen.

Dann giebt es solcher p-gliedrigen Untergruppen $(p = 1, 2, \ldots t)$, deren Individuen ein der N_d umschriebenes μ-flach zum gemeinsamen Pol-μ-flach haben, eine ∞^m Schaar, wo

$$(18)\quad m = (\mu-p)(p+1) - p(n-t).$$

Speciell ist diese Schaar eine endliche (∞^0), wenn (und dann immer)

$$(19)\quad \frac{n-t}{p+1} = \text{einer ganzen Zahl ist.}$$

*) Denn zu jeder solchen Untergruppe gehört wieder ein anderes solches μ-tupel.

**) Zur Abbürzung anstatt: zu allen der N_d einbeschriebenen Flächen n^{ter} Ordnung cf. pg. 374. Anm.

Dann wird μ

$$(20) \quad \mu = p\,\{1 + \frac{n-t}{p+1}\}.$$

Für $p = t$ ergeben sich die bez. Pol-Eigenschaften der gegebenen Gruppe selbst."

„In diesen Sätzen π (I, II) ist die vollständige Identität der Darstellbarkeit der binären Formen als Summen von gleich hohen Potenzen und der analogen der $(d+1)$-nären Formen, die eine N_d stützen und mit ihr (als N_d) die gegebenen binären Formen gemein haben, ausgesprochen." ,

216. Diesen Stützsätzen steht eine Reihe anderer gegenüber, von denen besondere Fälle schon pg. 97, 210, 221 behandelt sind. Es möge hier nur der Hauptsatz mitgetheilt werden, an den sich alle weiteren, namentlich durch Verschmelzung mit den Stützsätzen (nach Analogie der Entwicklungen pg. 98, 105, 138, 201 f., 230, 234, 237) entstehenden als Corollare anschliessen. Die Ableitungsmethode ist identisch mit der auf pg. 133 gegebenen, so dass auf ihre allgemeine Formulirung hier verzichtet werden mag.

Wir bezeichnen jetzt genauer mit $\underset{n}{F_{d}^{r}}$ ein solches (algebraisches) Gebilde im Raume von d Dimensionen, das selbst r-fach ausgedehnt ist und von jedem Lineargebilde (cf. pg. 356) auf der Stufe $(d-r)$ in n Punkten getroffen wird. Demnach würden die bis jetzt mit F_n bezeichneten Flächen jetzt als „$\underset{n}{F_{d}^{d-1}}$" anzugeben sein, unsere Normcurve mit $\underset{d}{F_{d}^{1}}$ etc.

Dann lautet unser allgemeinster Vielflach (H-) Satz folgendermassen *):

*) Wir substituiren im Satze selbst statt des Buchstabens F den anderen H, in Analogie mit den früheren Bezeichnungen.

ρ) H-Satz. „Durch die Ecken von q ($d \geq q \geq 2$) einer N_d (d. h. irgend einer Curve d^{ter} Klasse (und Ordnung, im Raume von d Dimensionen) umschriebenen k-flachen geht eine $H_{d\,n}^{q-1}$, wo

$$(21)\quad n = \frac{(k-q+1)\,(k-q)\,\ldots\,(k-d+1)}{1.\quad 2.\quad \ldots\,(d-q+1)}.$$

Sie ist dann zugleich der Ort der Ecken einer ∞^{q-1} linearen Schaar von N_d umschriebenen k-flachen. Diese letzteren sind, wenn die q gegebenen k-flache durch q binäre Formen k^{ter} Ordnung dargestellt sind, repräsentirt durch die ganze Gruppe derselben.

Von jedem Punkte der $H_{d\,n}^{q-1}$ geht ein und nur ein solches, N_d umschriebenes k-flach aus.“

Besondere Fälle dieses Satzes sind schon vielfach[70)] behandelt: ich nenne hier z. B. Hurwitz, Weyr, Pasch, Cremona. (Des Letzteren Arbeit war mir nicht zugänglich.)

Die analytische Darstellung dieser H-Gebilde ergiebt sich nach Früherem ohne Mühe aus der zu der gegebenen binären Formengruppe conjugirten „Schnittpunktgruppe“. Mittelst der fundamentalen Zerlegung der Nr. 21 ist es leicht, jedesmal die Flächen F_d^{d-1} anzugeben, deren vollständiger Durchschnitt unser H-Gebilde ist.

Endlich erhält man in Analogie mit Nr. 52, 138, 146 die canonische Darstellung dieser H-Gebilde (mittelst Produktensummen) ohne Weiteres aus der canonischen Potenzsummendarstellung der binären Formen.

Die sämmtlichen Entwicklungen und Sätze dieses § mögen in einer späteren Darstellung ausführlicher begründet werden.

§. 37.

Der Satz über die Covarianten der H-Reihe. Der Involutionensatz.

217. Beide Sätze eröffnen ein weites und schwieriges Gebiet unserer Apolaritätsforschungen: der erstere erledigt einen besonders wichtigen Fall der allgemeinen Frage nach der Bedeutung der Covarianten einer binären Form von zusammengesetzter Ordnung; der zweite lehnt sich wieder an einen Specialfall dieses Satzes an und führt in ein Gebiet ein, in dem überhaupt die gegenseitigen Verhältnisse der Lineargebilde in den höheren linearen Räumen, insbesondere insofern sie auf anzahlgeometrische Probleme führen, erforscht werden.

Wir nennen „H Covarianten" einer binären Form f gerader Ordnung ($2d$) die zwei-, drei- . . . d reihigen Determinanten der

2.1, 2.2, . . . $2\,(d-1)^{ten}$ Differentialquotienten von f (nach den homogenen Variabeln) aus dem Grunde, weil die erste Form dieser Reihe, die Hesse'sche Form von f, gewöhnlich mit H bezeichnet wird. Wir schreiben unsere Formen succ.

(1) $H_1, H_2, \ldots H_{(d-1)}$. Die Elemente der Determinante H_k sind (in der Variabeln) von der Ordnung $2d-2k$, mithin H_k von der Ordnung $2\,(k+1)\,(d-k)$.

Dann lautet unser Satz (unter H_0 sei f selbst verstanden):

σ) H-Satz. „Die Formen H_k (= 0 gesetzt, $k=0, 1, \ldots d-1$) stellen, wenn F_2 diejenige Fläche (zweiter Ordnung) ist, die eine X_d stützt und sie in den Punkten f (= 0) trifft, diejenigen Lineargebilde k^{ter} Stufe der Curve dar, die die Fläche berühren" oder kürzer: „die, Fläche und Curve gemeinsamen, Lineargebilde k^{ter} Stufe."

Wir benützen zum Beweise folgende Hülfssätze, deren

Beweis für ein beliebiges d gerade so geführt wird, wie für die Fälle $d = 2, 3$, wo er bekannt ist.

1) Die einer allgemeinen $F_2 = F_{\frac{d}{2}}^{d-1}$ „angehörigen“ (d. h. sie berührenden) Lineargebilde irgend einer Stufe bilden einen „Complex“ zweiten Grades d. h. sie sind durch eine Gleichung 2ten Grades in den Coordinaten*) eines solchen Gebildes bestimmt.

2) Ist eine N_d in allgemeinster Weise dargestellt durch:

(2) $\rho x_i = \overset{(d)}{\varphi_i}(\lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots d) = a_{i0}\,\lambda^d + \ldots a_{id}$,

so sind die (homogenen) Coordinaten eines der N_d angehörigen Lineargebildes k^{ter} Stufe die Kerne der aus den k^{ten} Differentialquotienten der φ gebildeten Matrix, somit ganze Funktionen von λ der Ordnung $(k+1)(d-k)$.

Aus (1) und (2) folgt

3) Es giebt $2(k+1)(d-k)$ einer N_d und einer $F_2 = F_{\frac{d}{2}}^{d-1}$ gemeinsame Lineargebilde k^{ter} Stufe, also gerade so viel, als die Ordnung von H_k beträgt.

4) Wenn ein Lineargebilde irgend einer Stufe eine F_2 berührt, so ist es in Bezug auf die F_2 zum Berührungspunkte conjugirt d. h. das zu irgend einem Punkte des gegebenen Gebildes conjugirte**) Lineargebilde $(d-1)^{\text{ter}}$ Stufe (Gebilde u) geht immer durch den Berührungspunkt.

Dann geht unser Beweis für den H-Satz so vor:

Die der N_d umschriebenen Pol-$(2d-k)$-flache der (die N_d stützenden) F_2 sind, wie wir wissen, dargestellt durch die zur Gruppe der k^{ten} Polaren von f conjugirte Gruppe d. h. die „Elemente“ ***) des $(2d-k)$flachs genügen den nach ebenso

*) cf. z. B. §. 1.

**) Kürzer: die Polare (u) des Punktes (in Bezug auf die F_2).

***) d. h. die Argumente der $(2d-k)$ Gebilde (u) (der Curve), die es bilden.

viel Werthen polarisirten und $= 0$ gesetzten k^{ten} Differentialquotienten von f.

Demnach stellt $H_k = 0$ diejenigen (und nur diese) der N_d umschriebenen Pol- $(2d-k)$-flache der F_2 dar, für die $2(d-k)$ ihrer Elemente (u-Gebilde) coincidirt sind (etwa in ε).

Aus dem Begriffe des Polvielflachs folgt dann sofort, dass in diesem Falle das Lineargebilde ε der Curve von der k^{ten} Stufe in Bezug auf die F_2 zu einem Punkte conjugirt ist, von dessen d an die Curve N_d gehenden Lineargebilden (u) gerade $(d-k)$ als Schnitt das Lineargebilde ε bestimmen.

Daraus folgt aber mit Heranziehung des dritten und vierten Hülfssatzes sofort unser Satz *) (cf. die spec. Fälle pg. 92, 201).

Der diesem entsprechende Satz für die ebenen Curven d^{ter} Ordnung, die einen Kegelschnitt stützen, ist daraus sofort angebbar, was aber unterbleibe, da seine Formulirung der geometrischen Prägnanz des H-Satzes entbehren würde (cf. pg. 235).

218. Man überzeugt sich sofort, dass (excl. $d = 1$, wo der Satz bedeutungslos ist) die Ordnung von H_k immer grösser ist als die von f und gleich (abges. von $k = 0$) nur für $k=d-1$.

Man kann daher die Frage aufwerfen: Ist umgekehrt eine Form der Ordnung $2(k+1)(d-k)$ gegeben, die zugleich den Bedingungen genügt, eine Form H_k zu sein, wieviel Formen f giebt es dann, deren Covariante H_k mit der gegebenen Form identisch ist?

Es soll hier nur der einfachste Fall $k=d-1$ in Betracht gezogen werden.

Dann lautet die Frage auch so:

Gegeben sei eine N_d und auf ihr ein $2d$-tupel g_λ:

---

*) Eine andere charakteristische Eigenschaft der binären Formen gerader Ordnung $(2d)$ und der zugehörigen F_2 ist pg. 382 mitgetheilt.

wieviele Φ_2 giebt es, die dieses $2d$-tupel g_λ ($=0$) (von u-Gebilden) mit der N_d gemein haben und die N_d stützen?

Diese Frage ist aber (nach Satz ε_1) pg. 366) identisch mit der andern:

Wieviel Involutionen $(d+1)^{ter}$ Ordnung giebt es mit gemeinsamen $2d = \delta$ Doppelelementen?

die selbst wieder in der allgemeineren enthalten ist:

τ) **Wieviel Involutionen $(d+1)^{ter}$ Ordnung giebt es mit gemeinsamen $2d=\delta$ Elementenpaaren (spec. Doppelelementen)?**

Die Lösung lautet:

„Die Anzahl x_δ dieser Involutionen bestimmt sich durch die Relation

$$(3)\quad \frac{x_\delta}{2} = \frac{(\delta-1)!}{(\frac{\delta}{2}+1)!\,(\frac{\delta}{2}-1)!}$$

die alle Fälle umfasst (nur dass man für $\delta=2$ für 0! die Eins zu setzen hat)".

Demnach ergeben sich z. B. für die Involutionen

3ter,	4ter,	5ter,	6ter,	7ter,	8ter, Ordnung
2,	5,	14,	42,	132,	425

Involutionen mit bez.

4, 6, 8, 10, 12, 14

gemeinsamen Elementenpaaren.

Für den Beweis dieses „Involutionensatzes" habe ich bis zur Zeit keine so einfache Form finden können, dass er hier vollständig abgeleitet werden könnte, es mögen einige Andeutungen über den Gang desselben hinreichen.

Das Verfahren ist dem früher (Nr. 155) bei Involutionen vierter Ordnung angewandten ganz analog. Man bemüht sich, die gewünschten Involutionen in der That durch geeignete (u)-Büschel auszuschneiden.

Gehen wir etwa zu den nächst höheren (fünfter Ordnung)

über, so denken wir uns zunächst eine R_9^3 mit 8 eigentlichen Doppelpunkten, deren Argumente, wie man sich (ähnlich wie auf pg. 321) unschwer überzeugt, ganz willkürlich gewählt werden können. (cf. die Anmerkung.)

Dann geht durch jede (eigentliche) vierfache Sekante der Curve ein Ebenenbüschel, das eine Involution fünfter Ordnung mit vorgegebenen acht Elementenpaaren aus der Curve ausschneidet.

Man bestimme daher zunächst die (bekannte) (cf. pg. 363) Anzahl der vierfachen Sekanten, die eine R_9^3 überhaupt besitzt: ziehe in unserem Falle davon ab erstens die Verbindungsgeraden je zweier der (8) Doppelpunkte, zweitens die Sekanten, die von je einem Doppelpunkt ausgehen und die Curve noch zweimal treffen. (Da durch Projektion von solchem Doppelpunkt aus auf eine Ebene eine R_7^2 entsteht, so giebt es solcher Sekanten so viele, als eine R_7^2 ausser 7 bestimmten Doppelpunkten noch weitere besitzt. Und analog in den höheren Fällen.) Demnach erhält man als Anzahl der eigentlichen vierfachen Sekanten unserer R_9^3:

$$(4)\quad \frac{7.\ 6.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 2.\ 3} - \frac{8.\ 7}{1.\ 2} - 8\left(\frac{6.\ 5}{1.\ 2} - 7\right) = 13.$$

Also existiren jedenfalls (mindestens) 13 Involutionen fünfter Ordnung mit 8 *) gemeinsamen Elementenpaaren.

Sehen wir zu, ob wir nicht einen noch genaueren Werth ermitteln, wenn wir unsere Involutionen aus einer R_{11}^4 (also im nächst höheren Raume) mit 8 (eigentlichen)

*) Diese sind auch als Argumente der 8 Doppelpunkte der R_9^3 willkürlich annehmbar. Denn acht eigentliche Doppelpunkte zu besitzen mit beliebigen Argumentenpaaren zählt 24 Bedingungen, die eine R_9^3 gerade erfüllen kann.

Doppelpunkten*) durch Büschel von (u)-Gebilden ausschneiden, die durch je ein die Curve sechsmal treffendes Lineargebilde zweiter Stufe (Ebene) gehen.

Wir bilden erst wieder die Anzahl dieser Ebenen für eine R_{11}^4 überhaupt (nach Formel (25) pg. 363): ziehen für unsern Fall davon ab 1) die Verbindungsebenen je dreier

*) Die Existenz dieser Curve ist leicht direkt nachweisbar. Denkt man sich eine R_8^2 mit 21 getrennten Doppelpunkten (eine Curve, die man durch einen continuirlichen Process analog dem pg. 346 anmerkung mitgetheilten aus einer R_7^2 mit 15, diese wieder aus einer R_6^2 mit 10 Doppelpunkten, die nach Nr. 192 existirt, ableiten kann) „und legt durch 13 derselben und irgend drei einfache Punkte der Curve eine ∞^3-Schaar von Curven fünfter Ordnung, so schneidet diese gerade die viergliedrige Gruppe unserer betrachteten R_{11}^4 aus“.

Die Argumente der acht Restdoppelpunkte der R_8^2 sind ganz willkürlich (wie die der drei einfachen Punkte) und in der That hängt eine R_{11}^4 mit acht Doppelpunkten (von beliebigen Argumenten) noch ausserdem von drei Willkürlichkeiten ab.

„Daher giebt es also auf unserer R_8^2 immer 14 Sextupel von Punkten, deren jedes nebst den 13 ausgewählten Doppelpunkten und drei willkürlich gewählten einfachen Punkten die Grundpunkte eines Büschels von Curven fünfter Ordnung bilden (und diese 14 Büschel schneiden dann 14 Involutionen fünfter Ordnung mit 8 gemeinsamen Elementenpaaren aus der Curve aus).“

Das einfachste Bild unserer 14 Involutionen erhält man in dem Fall der R_7^2 (mit 15 Doppelpunkten). Betrachtet man hier die Argumentenpaare von 8 derselben als die gegebenen Elementenpaare (die dann allerdings durch eine bestimmte Relation verbunden sind), so werden die gewünschten 14 Involutionen aus der Curve ausgeschnitten

1) durch die 7 Strahlbüschel der 7 weiteren Doppelpunkte,

2) durch 7 Büschel von Curven dritter Ordnung, deren Grundpunkte aus den 7 weiteren Doppelpunkten und je einem Paar von einfachen Punkten der Curve bestehen.

(Denn das Netz von Curven dritter Ordnung durch diese 7 Doppelpunkte schneidet aus der Curve die dreigliedrige Gruppe einer R_7^2 aus.)

der (8) Doppelpunkte, 2) die Verbindungsebenen je zweier von ihnen, die die Curve ausserdem noch zweimal treffen, 3) die durch je einen Doppelpunkt gehenden, die die Curve noch viermal treffen. Dies liefert für die gewünschte Zahl von eigentlichen sechsfachen Sekanten-Ebenen:

$$(5)\quad \frac{8.\ 7}{1.\ 2}\cdot\frac{7.\ 6}{2.\ 3}\cdot\frac{6.\ 5}{3.\ 4}-$$

$$\left\{\frac{8.7.6}{1.2.3}+\frac{8.\ 7}{1.\ 2}(15-6)+8\left\{\frac{7.\ 6}{1.\ 2}\cdot\frac{6.\ 5}{2.\ 3}-\frac{7.\ 6}{1.\ 2}-7(15-6)\right\}\right\}=14.$$

Durch jede derselben geht ein (u)-Büschel, das eine der verlangten Involutionen aus der Curve ausschneidet, sodass mindestens 14 solcher existiren müssen.

Geht man jetzt aber wieder weiter, zu R_{13}^5, R_{15}^6 etc. mit je acht eigentlichen Doppelpunkten und verfährt analog, so überzeugt man sich, dass diese Zahl 14 immer wiederkehrt, also eine obere Grenze für die gewünschte Anzahl darstellt.

Dies bestätigt sich vollkommen durch die allgemeine Untersuchung. Schneidet man, ganz wie oben, auch die Involutionen n^{ter} Ordnung, durch (u)-Büschel aus Curven aus, die immer $(2n-1)$ eigentliche Doppelpunkte besitzen, so ergiebt sich für die jedesmal so nachweisbare Zahl von gesuchten Involutionen (mit denselben $2(n-1)$ Elementenpaaren) eine Recursionsformel. Diese lässt sich in eine einzige Reihe zusammenziehen, deren Summe von einem bestimmten Gliede an einen festen Grenzwerth nie mehr überschreitet (weder nach oben noch nach unten). Darin liegt der (wenn auch nicht vollkommen strenge) Beweis, dass dieser Grenzwerth die gewünschte Anzahl genau darstellt. Dieser Grenzwerth nun ist kein anderer als der oben unter (3) angegebene, nachdem man für den ursprünglich gefundenen noch Zähler und Nenner

mit gewissen ganzen Zahlen multiplicirt hat, um ihm diese elegante Gestalt zu verleihen.

219. Unser Involutionensatz lässt sich aber auch leicht in die Sprache der höheren Räume übersetzen und bildet da wieder den Ausgangspunkt einer vollständigen anzahlgeometrischen Theorie der Lineargebilde dieser Räume.

Wählen wir als Beispiel die Involution vierter Ordnung. Eine solche ist auf einer N_4 durch zwei ihr umschriebene Vierflache (Quadrupel) gegeben und bestimmt dann vermöge aller ihr angehörigen Quadrupel die Punkte einer Geraden g. Jedem Doppelelemente der Involution entspricht dann eine „Ebene" der Curve, die die Gerade g trifft und umgekehrt. Daher giebt es so viele Involutionen vierter Ordnung mit denselben (6) Doppelelementen, als Gerade, die sechs Ebenen einer Curve N_4 (und somit nach einem bekannten[71]) Lagenprincip überhaupt sechs Ebenen) treffen.

Und so spricht sich der Involutionensatz τ) auch so aus:

Satz τ_1). „Es giebt $x_{\delta=2d}$ Lineargebilde erster Stufe (Geraden), die in einem Raume von $d+1$ Dimensionen δ Lineargebilde d^{ter} Stufe treffen (u. dual.)."

Und analog beweist sich folgender Ausspruch:

Prinzip v) „Es giebt in einem Raume von n Dimensionen gerade so viel Lineargebilde r^{ter} Stufe, die $(r+1)(n-r)$ Lineargebilde $(n-1-r)^{\text{ter}}$ (d. i. der conjugirten) Stufe treffen (u. dual.), als $(r+1)$-gliedrige binäre Gruppen n^{ter} Ordnung mit gemeinsamer Funktionaldeterminante."

Man erkennt daraus, dass die vollständige algebraische Erweiterung unseres Involutionensatzes τ) (auf höhere Gruppen) zugleich alle anzahlgeometrischen Probleme lösen würde, die man in den höheren (linearen) Räumen, sofern es sich um Lineargebilde allein handelt, überhaupt stellen kann.

Es ist hier aber zugleich der Ort, allgemein darauf hinzuweisen, wie wir durch unsere Apolaritätsbetrachtungen, die uns mit Nothwendigkeit auf die H-(cf. Satz ρ) und die ihnen je eindeutig zugeordneten (eine N_d stützenden) F-Gebilde und ihre invarianten Eigenschaften führten, thatsächlich implicite die Theorie der entsprechenden Lineargebilde höherer Räume mitbehandelt haben. Denn die Coefficienten in den Gleichungen der H-Gebilde sind ja nur lineare Combinationen der Coordinaten der bez. Lineargebilde (und umgekehrt) und es gelten zwischen ihnen die analogen Relationen, wie zwischen den letzteren (Coordinaten).

So waren die H-Kegelschnitte thatsächlich die Bilder der Raumgeraden und in diesem Sinne behandelte ja der §. 21 die Abbildung der linearen Complexe auf die Ebene.

So rechtfertigt sich die dem Titel dieses Werkes beigegebene Erklärung. Das schon zu Anfang dieses Kapitels in Aussicht gestellte Werk wird gerade diese Beziehung zwischen Linear- und H-Gebilden, nebst den bez. Coefficientenrelationen mit zu Grunde legen. So wird es möglich sein, eine schon von Manchen[72] (z. B. Grassmann, Veronese, Jordan, Halphén, Spottiswoode) angebahnte projektivische Theorie der höheren linearen Räume, wenigstens in den Elementen, systematisch durchzuführen.

§. 38.

Die lineare Transformation auf den rationalen Curven und die allgemeine Collineation.

220. Zum Schlusse soll noch die wichtige, am Ende von Kap. I aufgeworfene Frage nach der Beziehung zwischen den linearen Transformationen auf Curven R_n^d und den Collineationen des bez. Raumes erledigt werden. Dies geschehe in gedrängter Weise mittelst einiger Sätze, deren (einfache) Beweise hier unterdrückt sind.

Es genügt, statt der Curven R_n^d die (Norm)curven R_n^n zu Grunde zu legen. Dazu dient der

Hülfssatz I. „Gegeben sei eine R_n^n:

$$(1)\quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda)\ (i = 0, 1, \ldots n).$$

Streicht man $(n - d)$ dieser Gleichungen (etwa für $i = d+1, d+2, \ldots n$), so resultirt eine $R_{n'}^d$, die aus der R_n^n durch „Projection" entsteht, und zwar mittelst aller (∞^d) u-Gebilde*), die durch das Lineargebilde $(n-d-1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$(2)\quad x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots x_d = 0$$

gehen, auf dasjenige d^{ter} Stufe:

$$(3)\quad x_{d+1} = 0,\ x_{d+2} = 0, \ldots x_n = 0.$$

Ist daher umgekehrt eine R_n^d $(\rho x_i = \varphi_i(\lambda),\ i = 0, 1, \ldots d)$ gegeben, so lässt sie sich durch Hinzufügung von beliebigen $n-d$ weiteren Gleichungen $(\rho x_k = \varphi_k(\lambda),\ k = d+1, \ldots n)$ in der angegebenen Art als Projektion einer R_n^n auffassen. Eine lineare Transformation auf der R_n^d ist dann genau dieselbe, wie die auf der bez. R_n^n."

Fragen wir, in was für eine lineare Transformation des Raumes von n Dimensionen durch diesen Process irgend eine solche des gegebenen Raumes (von d Dimensionen) übergeht, so löst dies der

Hülfsatz II. „Ist die Transformation im höheren Raume (von n Dimensionen) gegeben durch:

$$(4)\quad \rho y_i = a_{ix} \equiv a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \ldots a_{in}\, x_n\ (i = 0, 1, \ldots n)$$

und verschwinden alle ν^{ten} Unterdeterminanten der Transformationsdeterminante (aber nicht alle $(\nu + 1)^{\text{ten}}$), so stellt diese specielle Transformation eine „Projection" dar von dem Lineargebilde ν^{ter} Stufe

$$(7)\quad a_{ix} = 0\ (i = 0, 1, \ldots n)$$ (mit den Horizontalcoefficienten a)

*) d. i. immer ein Gebilde $u_x = 0$.

auf das (dualistisch conjugirte) Lineargebilde $(n-\nu-1)^{\text{ter}}$ Stufe:

(8) $a_{k\alpha} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ (mit den Vertikalcoefficienten a), verbunden mit einer (allgemeinen) Collineation in dem letzteren Gebilde.

Umg. gehe man von einer beliebigen Collineation im letzteren Gebilde aus, so gelangt man rückwärts zur (uneigentlichen) Collineation (4) im höheren Raume."

221. Fragen wir nunmehr, welche (specielle) Collineation im bez. Raume (von n Dimensionen) eine lineare Transformation auf einer R_n^n nach sich zieht, so lautet die Antwort:

Satz φ) „Durch eine (allgemeine) lineare Transformation auf einer R_n^n ist die (allgemeinste) Collineation des bez. Raumes *von der Art* bestimmt, dass sie die Curve in sich überführt und umgekehrt. Eine solche besondere Collineation hängt (bei ganz willkürlicher Annahme der R_n^n und der projectivischen Beziehung auf ihr) von $(n-1)$ Constanten weniger ab, als die allgemeine Collineation (des bez. Raumes). Dies rührt daher, dass, *wenn* es eine R_n^n giebt, die bei einer Collineation in sich übergeht, so auch noch eine ∞^{n-1} Schaar."

In der That, seien 0, ∞ die Doppelelemente der projectivischen Beziehung auf der R_n^n, und das Coordinatenpolyeder das Normpolyeder (cf. Nr. 30) der Curve, so ist diese dargestellt durch:

$$(9) \quad \rho x_i = k_i \lambda^i \; (i = 0, 1, \ldots n)$$

und die projektivische Beziehung nebst der durch sie bestimmten Collineation durch

$$(10) \quad \lambda' = \varkappa\lambda, \quad \sigma y_i = \varkappa^i x_i.$$

Dann aber geht auch jede Curve der ∞^{n-1} (pg. 44, 300)

Schaar, die durch (9) bei variabeln k dargestellt ist, in sich über.

222. Nun ist aber der strengere (allgemeinere) Begriff einer binären linearen Transformation

$$(11) \quad \mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

bekanntlich der, dass λ und μ nicht auf derselben, sondern zwei verschiedenen (ganz beliebigen) R^n_n interpretirt werden, die dann vermöge (11) projektivisch auf einander bezogen werden.

Von diesem Gesichtspunkt aus gelangen wir zu dem

Collineations-Fundamentalsatz ψ). „Durch eine allgemeine Collineation (im Raume von n Dimensionen) geht offenbar *irgend* eine R^n_n (mit ihren sämmtlichen Lineargebilden) über in eine S^n_n (mit allen ihren Lineargebilden) und zwar sind dann vermöge der Collineation die Elemente beider Curven projectivisch auf einander bezogen.

Aber auch umgekehrt ist durch eine projektivische Beziehung zwischen irgend zwei Curven R^n_n, S^n_n *) (in allgemeiner Lage) eine Collineation

*) Nehmen wir die eine Curve zur Normcurve

$$\rho x_i = n_i \lambda^i \ (n_0 = 1,\ n_1 = n, \text{ etc.})$$

so ist die zweite in allgemeinster Weise dargestellt durch

$$\sigma x_i = \varphi_i(\mu) = n_0 a_{i0} \mu^n + n_1 a_{i1} \mu^{n-1} + \dots n_n a_{in} \mu^0.$$

Vermöge der projectivischen Beziehung (11) gehen die $\varphi_i(\mu)$ über in {abges. von dem in σ eingehenden Faktor $(c\lambda + d)^n$}:

$$\Phi_i(\lambda) = n_0 A_{i0} \lambda^n + n_1 A_{i1} \lambda^{n-1} + \dots n_n A_{in} \lambda^0.$$

Dann ist die durch (11) bestimmte Collineation unseres Raumes keine andere als

$$\tau y_i = A_{i0} x_0 + A_{i1} x_1 + \dots A_{in} x_n.$$

Waren die a_{ik} allgemeiner Natur, so auch die A_{ik}.

(des bez. Raumes) und zwar die allgemeinste ihrer Art bestimmt.

In diesem Sinne stellt demnach die binäre Collineation (11) zugleich die $(n+1)$-näre dar und umgekehrt und die Invarianten des einen Gebiets zugleich die des andern.“

Daher ist die oft von uns benützte Operation: „Man wähle irgend eine vorliegende R^n_n zur Normcurve (statt der ursprünglich vorhanden gedachten, auf die der bez. Raum bezogen gewesen war) und nehme auf ihr eine beliebige Parametervertheilung an“ identisch mit der kürzeren:

„Man übe auf den Raum eine allgemeine Collineation aus (durch die die ursprüngliche Normcurve in die R^n_n übergeht).“

Litteraturverzeichniss.

Die Citate des Textes sind hier nur zum Theil wiederholt. Die Bezeichnung der Zeitschriften ist die der Ohrtmann'schen Fortschritte der Mathematik, nur werden die betreffenden Bände hier mit arabischen Ziffern angegeben. Die Ohrtmann'schen Bände selbst sind durch ein F und eine römische Ziffer gekennzeichnet. Die dem Verfasser nicht zugänglich gewesenen Arbeiten sind mit * versehen.

Capitel I.

1) pg. 1. cf. auch F. Klein's Referat über Clebsch, F. IV, pg. 62. Spätere Beweise gaben noch
A. Brill, Über zwei Berührungsprobleme, Clebsch Ann. 3.
E. d'Ovidio *, Ricerche sui sistemi . . . ., Atti di Torino 12.

2) pg. 3. v. z. B. Clebsch l. c. selbst.

3) pg. 7. cf. auch A. Brill, Zur Theorie der Elim. . . ., Clebsch Ann. 4. Im Übrigen sehe man in den Lehrbüchern von Baltzer (Determinanten) und Salmon-Fiedler (Algebra) nach.

4) pg. 11. J. Rosanes, Über ein Princip der Zuordn. alg. Formen, Borchardt J. 76.
Th. Reye, Erweiterung der Polarenth. alg. Flächen, Borchardt J. 78 (des Weiteren v. unter 30).

5) pg. 15. cf. die folgenden Nummern des Textes. Eine systematische Ausführung erfolgt im späteren Werke.

6) pg. 16. A. Brill, Note über die Gleich. . . . Clebsch Ann. 5.
L. Painvin, Sur les courbes unicursales, C. R. 78.

7) pg. 17. cf. z. B. Salmon-Fiedler, Algebra art. 84 f.

8) pg. 17. cf. z. B. L. Cremona, Preliminari di una teoria geom. delle superf. (übers. v. Curtze) Nr. 242.
Ed. Weyr, Classif. des courbes du six. ordre dans l'esp. C. R. 76.
Em. Weyr, Über rat. Raumcurven, Prag. Ber. 1882.

9) pg. 21. 11) pg. 23. 16) pg. 23. 17) pg. 38. 58) pg. 281. P. Gordan, Über Combinanten, Clebsch Ann. 5.

10) pg. 23. Vorlesungen über Geom. Bd. I. pg. 274.
cf. S. Gundelfinger, Erweiterte Fassung eines . . . Übertr.-princips Clebsch Ann. 6.

12) pg. 25. 21) pg. 53. cf. R. Sturm, Darstellung bin. Formen auf der cubischen Raumcurve. Borchardt J. 76.
E. d'Ovidio., Studio alle cubiche gobbe . . ., Battaglini G. 17.
G. Pittarelli, La cubica gobba . . . ., Battaglini G. 17.
S. Beltrami*, Ricerche sulla geom. . . . cubiche, Mem. di Bol. 16.
Em. Weyr*, Intorno alle cubiche gobbe. Rend. Ist. Lomb. 1871.
P. Appell, Sur les propr. des cub. gauches Darboux Bull. 11.
J. Tannery, Note dazu. Darboux Bull. (2) 1. Ausserdem bes.
H. Schröter, Die Oberfl. zweiter und Raumc. dritter Ordnung.

13) pg. 25. 26 pg. 73. J. Rosanes v. unter 4); ausserdem:
J. Rosanes, Über die Darstellung bin. Formen als Potenzs. Borchardt J. 75.

14) p. 27. G. Garbieri, Nuovo teoremo algebrico . . ., Battagl. G. 16.
cf. auch F. Mertens, Zur Theorie der symm. Fct., Borchardt J. 69.
Kostka, Über die Best. v. symm. Fct. . . ., Borchardt J. 81, sowie ganz besonders
L. Kronecker in seinen hierauf bez. Arbeiten der Berl. Ber.

15) pg. 30. cf. H. Anglin*, Mathem. Notes, Trans. of Dublin 1880.

18) pg. 40. J. Lüroth, Beweis eines Satzes über rat. Curven, Clebsch Ann. 9. vgl. auch überhaupt zu Kap. I die Monographie
Ed. Weyr*, Über rat. ebene Curven, Casopis 8.
J. Haase, Zur Theorie der (R_n^2). Clebsch Ann. 2.
E. Schröder, Über v. Staudts Würfe . . Clebsch Ann. 10.
A. Brill, Über rat. Curven vierter Ordnung, Clebsch Ann. 12.
Em. Weyr, Über Inv. n^{ten} Grades u. k^{ter} Stufe. Wien. Ber. 79.
" " Über mehrstufige C. u. Fl.systeme. " " 84.
O. Tognoli, Sulle curve gobbe raz. Battaglini G. 11, 12.

19) pg. 41. 27) pg. 73. 41) pg. 190. A. Clebsch, Über rat. Curven, Borchardt J. 63. (v. unter 41).)

Capitel II.

20) pg. 42. Als Grundlage ist wohl anzusehen:
O. Hesse, vier Vorlesungen über Homographie. Ferner v. unter 12) und cf. noch:
Laguerre* Sur la représ. des formes binaires . . . Jnst. 40.
Em. Weyr*, Intorno all' involuzione cubica Rend. Ist. Lomb. 1871.
H. Rosenow, Über Curven dritter Ordn. . . . Diss. Leipzig.
Em. Weyr, Verschiedene Arbeiten in Prag. Abh. u. Ber. (cf. F IV, VII), besonders Wien. Ber. 84 (December).
L. Cremona, v. unter 47).

22) pg. 53. cf. Em. Weyr, Über Projectivitäten und Involutionen auf rationalen Curven dritter Ordng. Wien. Ber. 1880.
Em. Weyr*, Über Inv. bei Curven dritter Ordng., Casopis 9.

23) pg. 55. cf. z. B. Salmon-Fiedler, Raumgeom. Art. 13.
24) pg. 67. A. Voss, Raumcurven und Developpable, Clebsch Ann. 13.
25) pg. 70. A. Clebsch, Über sim. bin. cub. Formen. Borchardt J. 67.
" " Zur Theorie der bin. biq. Formen, ebenda.
28) pg. 74. 29) pg. 75. 35) pg. 99. cf. Salmon-Fiedler, Raumg. Art. 329.
30) pg. 84. 42) pg. 195. 45) pg. 203. 48) pg. 222. Die Grundlagen der Apolaritätstheorie sind in folg. Arbeiten entwickelt:
Th. Reye, Trägheits- und höhere Momente, Borchardt J. 72. (cf. auch Schlömilch Z. 10.)
Th. Reye, Über Polfünfecke . . . . ., Borchardt J. 77
" " Erweit. der Polarentheorie . . . . " " 78
" " Geom. Beweis des Sylv. Satzes. . . ., " " 78
" " Darst. quat. biq. Formen . . . ., " " 78
" " Über alg. Fl., die . . . apolar sind, " " 79
" " Über Systeme und Gewebe alg. Fl., " " 82
" " Über lineare Systeme der F_2 . . ., " " 82
" " Über die recipr. Verw. . . ., " " 82
J. Rosanes, Darst. bin. Formen als Potenzs. " " 75
" " Ein Princip der Zuordng. alg. Formen " " 76
" " Über Systeme von Keg., Clebsch Ann. 6 v. F. Klein in F. V, pg. 358. (Referat.)
" " Über linear abh. Punktsysteme, Borchardt J. 88.
" " Zur Theorie der recipr. Verw., " " 90.
St. Smith, On some geom. constr. Proc. cf. L. M. S. 2.
H. Picquet*, Etude sur les systemes pontuels . . 1872.
" " *, Sur un nouveau mode de géner. . . . des (F_3). Bull. S. M. F. 4. (cf. Referat v. R. Sturm F. VIII pg. 373).
Faure in Nouv. Ann. 19.
G. Salmon, Kegelschnitte art. 351.
G. v. Escherich, die recipr. lin. Flächensysteme. Wien. Ber. 75.
G. Grassmann, Verw. der Ausdehnungslehre. . . ., Borchardt J. 84.
A. Brill, C. Stephanos cf. Text pg. 241 R. Sturm Text pg. 46. Zudem vgl. noch die bezügl. Darstellungen bei Clebsch-Lindemann. (Endlich v. unter folg. Nr.)
31) pg. 84. 43) pg. 196. vgl. z. B. Hesse's Raumgeom. Vorl. 16.
32) pg. 87. O. Hesse in Borchardt, J. 20, 36. cf. die Zusätze von J. Rosanes in Schlömilch Z. 17 und Borchardt J. 88.
33) pg. 92. F. Lindemann*, Sur une représ. des covariants des formes binaires. Bull. S. M. F. 5. 6.
cf. S. Burnside, On the Invariants and Cov. . . . ., Quart. J. 10.
34) pg. 97. Über die Sätze ζ') und λ) cf. z. B. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte art. 351 ff.
Einmal bilden diese Sätze die Grundlage der §. 20, 21 gegebenen Abbildung der linearen Complexe auf die Ebene, insofern cf.

L. Cremona*, Sulle superficie e le curve che passano ..., Rend. Ist. Lomb. (2) 12.

Fr. Chizzoni*, Sulla superficie e sulle linee .... Bericht von Cremona und Beltrami Acc. R. L (3) 3.

F. Aschieri*, Immagine piana dei complessi .. Rend. Ist. Lomb. (2) 12.

F. Aschieri*, Sulla rappres. dello spazio rigato. Rend. Ist. Lomb. (2) 12.

andrerseits ist Satz λ) der einfachste Fall des allgemeinen H-Satzes (§. 36). Über andere Specialfälle dess. cf. Cremona l. c. &:

47) pg. 221. 57) pg. 277. 70) pg. 387.

G. Darboux, Sur une classe remarquable des surf. ... und* Sur un nouveau système ... Inst. 40.

O. Hesse, z. B. Anal. Geom. des Raumes. Vorl. 16, 17.

M. Pasch, Ein alg. Satz nebst geom. Anwdg. Borchardt J. 89.

A. Hurwitz, Über unendlich vieldeutige geom. Aufg. ... Clebsch Ann. 15.

A. Hurwitz, Beweis eines Satzes ... Clebsch Ann. 20.

Em. Weyr, Über Invol. höherer Grade, Borchardt J. 72, Schlömilch Z. 16, Wien. Ber. 61, Battaglini G. 10.

" " * Principes d'une théorie des systèmes symétriques .., Mém. de Bord. 10.

" " Die Curven dritter Ordng. als Involutionscurven, Prag. Ber. 1877.

" " Über vollst. eingeschr. Vielseite, Wien. Ber. 81.

" " Bulletin de l'Acad. de Belg. 1882. (v. unter 60).)

Auch in den übrigen zahlreichen Arbeiten Em. Weyr's (cf. Wien. Ber., Prag. Ber.) spielen Fälle des H-Satzes eine wichtige Rolle.

36) pg. 178 v. unter 21) 12) (bes. d' Ovidio, Pittarelli, Rosenow, Appell).

37) pg. 181. cf. z. B. G. Veronese, Behandlung der proj. Verh. der Räume ..., Clebsch Ann. 19 (v. auch unter 72).

G. Grassmann, Ausdehnungslehre 1844. 1862.

38) pg. 182. 39) pg. 183. 40) pg. 186.

A. Cayley*, Solution of question. Educ. Times 15; Messeng. 5.

L. Cremona*, Em. Weyr*, Sopra una certa curva gobba di 4° ord. Rend. Ist. Lomb. 1868; (3) 6.

E. Bertini*, Sulla curva gobba di 4° ord... Rend. Ist. Lomb. (2) 5.

F. Armenante, Sulle curve raz. del 4° ord. Battagl. 11, 12.

L. Cremona, Sulle curve gobbe raz. del 4° ord. Tortolini (1) 4.

Em. Weyr, Über rat. Curven vierter Ordng., Clebsch Ann. 4, Wien. Ber. 71, 75. Prag. Ber.* 1875.

" " *Über die Abbldg. ders. auf Keg. Wien. Ber. 72, 73, 78.

41) pg. 190, vgl. auch G. Korndörfer, Über diejenigen Raumcurven deren Coord. . . ., Clebsch Ann. 3 (v. unter 19).
44) pg. 202. 63) pg. 327. cf. P. Serret, géom. de direction Paris 1869. (pg. 290.) Th. Reye, Über Polfünfecke v. unter 30.)
46) pg. 210, A. Hurwitz v. unter 34).
49) pg. 231. cf. z. B. Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geom.
T. Walter, Über den Zushg. der ebenen C_3. . . Diss. Giessen.
G. Battaglini, in „in Memoriam D. Chelini", Mailand 1881.
50) pg. 234. Em. Weyr etc. v. unter 34) nebst
Em. Weyr, Beiträge zur Curvenlehre, Wien, Hölder.
„ „ * Über Pkt.systeme auf rat. C. Prag. Ber. 1873, 1874.
51) pg. 234. J. Lüroth, Ein. Eig. einer gew. Gatt. v. C_4. Clebsch Ann. 1.
„ Neuer Beweis des Satzes . . .. Clebsch Ann. 13.
W. Scherrer, Über tern. biqu. Formen. Brioschi Ann. 10.
52) pg. 250. 55) pg. 271. v. die Lehrbücher von Clebsch-Lindemann; Salmon (Höhere ebene Curven), sowie
H. Durège, Über die Doppeltgten. der R_4^2. Wien. Ber. 75.
A. Ameseder, Bobek in Wien. Ber. 1879, ff.
Em. Weyr, Über biq. Inv. zweiter Stufe. Wien. Ber. 81.
53) pg. 251. 54) pg. 255. Ausser den Lehrbüchern cf. noch
G. Battaglini, Nota sulle forme bilin. Att. d. Linc. 5.
56) pg. 271. Ausser den Lehrbüchern cf. noch J. Rosanes, Borchardt J. 88 (v. unter 30) nebst
F. Aschieri, in den neuesten Jahrgängen der Rend. Ist. Lomb.
59) pg. 312. L. Cremona, Sur les cub. gauches, Borchardt J. 58, 60.
R. Sturm, Comb. y a-t-il de séc. comm. . . . Brioschi Ann. (2) 3.
„ „ Erzeugnisse, Elementarsyst. . . . Borchardt J. 79, 80.
60) pg. 318. Em. Weyr, Wien. Ber. 1882, März, April.
cf. C. le Paige*, Mém. de l'Acad. de Belg. 42 (& neuere* Wien. Ber.) (Auch hins. der Geom. der Involutionen übhpt.)
61) pg. 322. cf. z. B. Salmon-Fiedler, Raumg. art. 357.
62) pg. 324, 326. Th. Reye, schon pg. 326 Anm. citirt. J. Rosanes, Borchardt J. 88 (v. unter 30), Em. Weyr, im Bull. de Belg. 1882.
64) pg. 338. C. Hierholzer, Über Keg. im Raume, Clebsch Ann. 2.
„ „ Über eine Fläche 4. Ord. Clebsch Ann. 4.
Zum Excurse über die Flächen dritter Ordnung cf. etwa noch
P. Gordan, das Pentaeder der Flächen 3. Ordng. Clebsch Ann. 5.

Capitel III.

65) pg. 357. G. Grassmann, Ausdehnungslehre. v. unter 37).
66) pg. 362. Salmon-Fiedler, Raumgeom. art. 239.
H. Picquet, Sur les courbes gauches alg. C. R. 77.

67) p. 368. E. Bertini, Sulle curve gobbe razionali del 5^0 ord. In mem. D. Chelini, Mailand 1881.
68) pg. 376. cf. A. Cayley's memoirs upon Quantics. Phil. Trans.
69) pg. 377. P. Serret, géom. de direction. Paris 1869.
G. Grassmann, Über zus.gehörige Pole, Gött. Nachr. 1872.
„ „ Verwendung der Ausdehn.lehre ... (v. unter 30).
E. Caporali*, Teoremi sulle curve 3. ord. . . Acc. R. L. (3) 1.
J. Casey*, On cubic transformations, Trans. of Dublin 1880.
Th. Reye v. unter 30).
71) pg. 395. cf. z.B. H. Schubert, Calcül der abzählenden Geom. Leipzig.
72) pg. 396. G. Grassmann, Ausdehnungslehre. G. Veronese v. unter 37).
A. Cayley, On the superlines . . . Quart. 12.
W. Spottiswoode, Sur la représ. alg. des lignes . . . C. R. 76.
„ „ Sur la repr. des fig. de géom. à n dim. C. R. 81.
C. Jordan*, Essai sur la géom. à n dim. Bull. S. M. F. 3.
G. Halphén*. Recherches de géom. à n dim. Bull. S. M. F. 2.
E. Betti, Sopra gli spazi . . . Brioschi Ann. (2) 4.
K. Clifford, On the classif. of loci. Phil. Trans. 169.
S. Kantor, Über eine Gattg. von Config. Wien. Ber. 1879.
Im Übrigen sei noch auf das Litteraturverzeichniss in Faà de Bruno, binäre Formen (Leipzig, 1881) verwiesen, z. B. hinsichtlich der Potenzdarstellung binärer Formen. Wegen dieser cf. noch
R. de Paolis, Sulla espr. di una forma bin... R. Ac. L. 1881.
und betr. ternärer etc. Formen ausser Serret (géom. de dir.) noch
K. Clifford, On syzygetic relations . . . Proc. L. M. S. 3.

Berichtigungen.

Statt „53“ pg. 43 z. 4 v. u. lese man „35“.
„ „reduciren sie sich auf“ pg. 60 z. 7 v. u. — „bestimmen sie“.
„ „§. 17, 18“ pg. 84, 100 — „§. 18, 18a“.
„ „+“ pg. 126 z. 12 v. u. — „$\mp$“.
„ „linear“ pg. 191 z. 4 v. u. — „linear in den λ_i“.
„ „Grades“ pg. 201 z. 8 v. o. — „Grades von“.
„ „$n+1$) Seiten“ pg. 234 z. 14 v. u. — „($n+1$)-Seiten“.
„ „$-+$“ in (26'') pg. 189 immer „+“.
„ „$+i$“ pg. 304 z. 4 v. o. — „$\pm i$.“

